Лекція № 10.

Тема: Дослідження функцій за допомогою похідних.

План:

1. **Поняття екстремуму функції. Правила дослідження функцій на екстремум за допомогою похідних.**
2. **Опуклість, точки перегину функції. Застосування похідної для дослідження опуклості графіка функції.**
3. **Найбільше й найменше значення функції на проміжку.**

1. Поняття екстремуму функції. Правила дослідження функцій на екстремум за допомогою похідних.

Нехай функція *f(x)* визначена на інтервалі *(a,b)*.

Достатня умова зростання (спадання функції).

Означення. Функція *f(x)* називається *зростаючою* в деякому інтервалі, якщо в точках цього інтервалу більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції, і *спадною*, якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції.

Означення. Інтервали на яких функція тільки зростає або спадає, називаються інтервалами *монотонності* функції.

Теорема 1. *Якщо похідна функції f(x) додатна (від'ємна) в деякому інтервалі, то функція в цьому інтервалі монотонно зростає (спадає).*

<u>Приклад.</u> Знайти проміжки зростання та спадання функції $y = 8x - x^2$.

Розв'язання.

Область визначення функції – уся числова вісь $-\infty < x < +\infty$. Знайдемо похідну $y' = 8 - 2x$. Функція диференційовна на проміжку $-\infty < x < +\infty$.

Для визначення проміжку зростання функції розв’яжемо нерівність $8 - 2x > 0$, $x < 4$, тобто функція зростає на проміжку $-\infty < x < 4$.

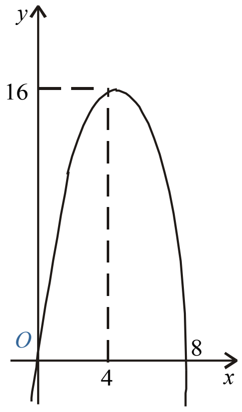

Рис. 1

При визначенні проміжку спадання функції (рис.1) маємо $8–2x<0$, тобто $4 < x < +\infty$.

Означення. Точку x_0 називають *точкою максимуму (мінімуму)* функції *f(x),* якщо існує δ-окіл точки x_0 , який міститься в проміжку *(a,b)*, і такий, що для всіх значень *x*, взятих з δ-околу, виконується умова $f(x)<f(x_0)(f(x)>f(x_0))$.

Точки максимуму і мінімуму називаються *екстремальними точками*, а сам максимум і мінімум *екстремумами функції*.

Екстремум функції, у загальному випадку, має локальний характер - це найбільше або найменше значення функції порівняно з ближніми її значеннями.

Необхідна умова існування точок екстремуму.

Теорема 2. *Якщо функція f(x) у внутрішній точці x_0 проміжку (a,b) має екстремум, то в цій точці похідна f’(x), якщо вона існує, дорівнює нулю.*

З геометричної точки зору це означає, що в точці екстремуму диференційовної функції $y = f(x)$ дотична до її графіка паралельна осі *Ox* (рис. 2).

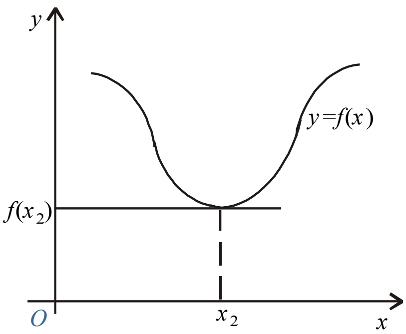

Рис. 2

Означення. Точки в яких похідна функції дорівнює нулю називаються *стаціонарними* точками, а точки в яких похідна функції дорівнює нулю, або не існує називаються *критичними* точками функції.

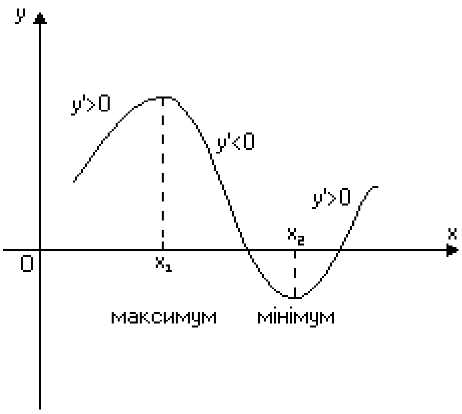

Рис.3

Достатня умова існування точок екстремуму.

Теорема 3. *Якщо похідна функції $f'(x)$ при переході x через точку x_0 міняє знак, то точка x_0 є точкою екстремуму функції, причому, якщо похідна функції при переході через точку x_0 міняє знак з плюса на мінус, то x_0 є точкою максимуму функції, а якщо похідна при переході через точку x_0 міняє знак з мінуса на плюс, то x_0 є точкою мінімуму функції (див. рис.3)*

Щоб дослідити функцію на монотонність та екстремуми, потрібно:

1) Знайти похідну функції в точці x: $f'(x)$.
2) Знайти критичні точки функції, т/б знайти точки в яких похідна функції дорівнює нулю або не існує.
3) Розбити область визначення функції критичними точками на проміжки.
4) Встановити знаки похідної при переході через критичні точки.
5) Виписати проміжки монотонності функції і точки екстремуму.
6) Обчислити значення функції *f(x)* в кожній екстремальній точці.

<u>Приклад</u>. Дослідити на максимум і мінімум функцію

$$y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1.$$

Розв'язання.

1. Знаходимо першу похідну $y' = x^2 - 4x + 3$.

2. Знаходимо дійсні корені рівняння $x^2 - 4x + 3 = 0\,(f'(x) = 0)$. Звідки $x_1 = 1,\ x_2 = 3$.

Похідна скрізь неперервна. Значить, інших критичних точок для заданої функції не існує.

3. Досліджуємо критичні значення. Для цього область визначення функції $(-\infty,\ +\infty)$ здобутими критичними точками розбиваємо на три інтервали $(-\infty,\ 1)$, (1, 3), $(3,\ +\infty)$.

Виберемо в кожному інтервалі по одній точці і обчислимо значення похідної в цих точках:

$$x = 0 \in (-\infty, 1),\quad y'(0) = 3 > 0;$$

$$x = 2 \in (1, 3),\quad y'(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1 < 0;$$

$$x = 4 \in (3, +\infty),\quad y'(4) = 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 11 > 0.$$

Знак похідної на кожному з трьох інтервалів збігається зі знаком похідної в обраній точці відповідного інтервалу (табл. 1).

Таблиця 1

x	$(-\infty, 1)$	1	(1, 3)	3	$(3, +\infty)$
y'	+	0	–	0	+
y	$\nearrow$	$y_{\max}(1) = \frac{7}{3}$	$\searrow$	$y_{\min}(3) = 1$	$\nearrow$

З таблиці видно: при переході (зліва направо) через значення x=1 похідна змінює знак з «+» на «–». Звідси, при x=1 функція має максимум:

$$y_{\max}(1) = \frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 = \frac{7}{3}.$$

При переході через значення x=3 похідна змінює знак з «–» на «+». Звідси, при x=3 функція має мінімум:

$$y_{\min}(3) = \frac{3^3}{3} - 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1 = 1.$$

2. Опуклість, точки перегину функції. Застосування похідної для дослідження опуклості графіка функції.

Означення. Якщо існує δ-окіл точки x_0 такий, що для всіх x, взятих з цього околу, відповідні точки кривої лежать над дотичною (під дотичною), проведеною до кривої в точці $(x_0,f(x_0))$, то криву в цій точці називають *опуклою вниз (опуклою вгору).*

Теорема 4. *Нехай криву задано рівнянням $y=f(x)$ і нехай існує δ-окіл точки x_0 такий, що функція $f(x)$ при кожному x, взятому з цього околу, має похідні другого порядку включно, причому $f'(x)$ у точці x_0 є неперервною функцією. Тоді, якщо $f''(x)>0$, то крива в точці $(x_0,f(x_0))$- опукла вниз, якщо $f''(x)<0$, то крива в точці $(x_0,f(x_0))$- опукла вгору.*

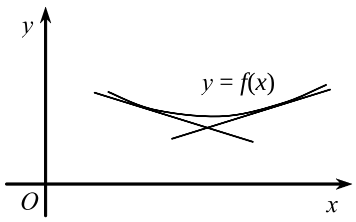

рис.4 Крива опукла вгору

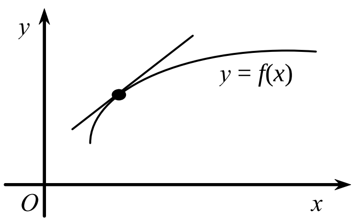

рис.5 Крива опукла вниз

Означення. Точка c графіка диференційованої функції $y=f(x)$, $x\in(a;b)$, яка є одночасно кінцем інтервалу опуклості вгору і кінцем інтервалу опуклості вниз, називається *точкою перегину* графіка цієї функції.

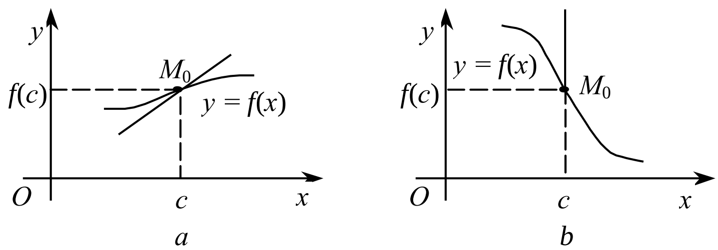

рис.6 Точка перегину

Теорема 5 (необхідна умова). *Нехай функція y=f(x) має неперервні похідні другого порядку на інтервалі (a,b), причому x_0є(a,b). Для того щоб точка (x_0,f(x_0)) була точкою перегину, необхідно, щоб виконувалась умова f''(x_0)=0.*

Теорема 6 (достатня умова). *Якщо функція y=f(x) має неперервні похідні другого порядку на інтервалі (a,b) і при переході через x_0є(a,b) друга похідна змінює знак, то точка (x_0,f(x_0)) є точкою перегину.*

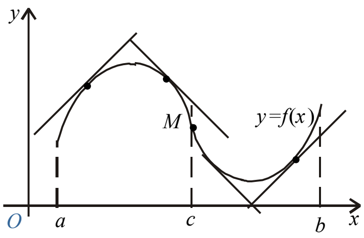

Рис.7

Зауваження. Якщо у точці x_0 друга похідна $f''(x)$ дорівнює нулю або не існує, але при переході через цю точку $f''(x)$ не змінює свого знака, то точка $M(x_0,\ f(x_0))$ не є точкою перегину.

<u>Приклад</u>. Знайти інтервали опуклості та вгнутості графіка функції $y = e^{-x^2}$.

Розв'язання.

Маємо $y' = -2xe^{-x^2}$, $y'' = 4\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2}$.

Друга похідна y'' перетворюється в нуль, коли

$$x^2 - \frac{1}{2} = 0, \text{ звідки } x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

При переході через точки x_1 і x_2 друга похідна змінює знак. Таким чином, точки $M_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ і $M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ є точками перегину графіка функції.

Результати дослідження заносимо в табл. 2.

Таблиця 2

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$
y''	+	0	–	0	+
y	$\cup$	Перегин	$\cap$	Перегин	$\cup$

Із цієї таблиці бачимо, що графік функції на інтервалах $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ і $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$ вгнутий, а на інтервалі $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ — опуклий.

3. Найбільше й найменше значення функції на проміжку.

Нехай функція *f(x)* неперервна на відрізку [a;b].

Функція *f(x)* досягає своїх найбільшого й найменшого значення на відрізку [a;b] або на кінцях цього відрізку, або в критичних точках функції, що належать даному відрізку.

Алгоритм знаходження найбільшого й найменшого значення функції на проміжку.

1. Знайти похідну функції в точці x: $f'(x)$.
2. Знайти критичні точки функції, т/б знайти точки в яких похідна функції дорівнює нулю або не існує.
3. Вибрати критичні точки, які належать проміжку $[a;\ b]$.
4. Знайти значення функції $f(x)$ в критичних точках і на кінцях проміжку.
5. Із знайдених значень вибрати найбільше й найменше значення функції.

<u>**Приклад**</u>**.** Знайти найбільше і найменше значення функції

$y(x)=x^3-3x^2-9x+15$ на відрізку [-2;2].

Розв'язання.

Знайдемо похідну функції *y(x)*

$$y'(x)=3x^2-6x-9.$$

Знайдемо критичні точки функції *y(x)*

$$y'(x)=0 \qquad\qquad 3x^2-6x-9=0$$

$$x^2\text{-}2x\text{-}3=0$$

$$D=4\text{-}4\cdot(\text{-}3)\cdot 1=16$$

$$x_1=(2\text{-}4)/2=-1,\ x_2=(2+4)/2=3.$$

Маємо: $-1 \in [-2;2]$

$3 \notin [-2;2]$.

Знаходимо значення функції y(x) в критичних точках і на кінцях відрізка [2;2].

$$y(-2)=-8-12+18+15=17$$

$$y(-1)=-1-3+9+15=20$$

$$y(2)=8-12-18+15=-7$$

$\max\limits_{[-2;2]} y(x)=y(-1)=20,$ $\min\limits_{[-2;2]} y(x)=y(2)=-7$

Відповідь. $\max\limits_{[-2;2]} y(x)=y(-1)=20,$ $\min\limits_{[-2;2]} y(x)=y(2)=-7$

Приклад. З усіх прямокутників даного периметра знайти той, у якого площа найбільша.

Розв'язання.

Нехай периметр прямокутника дорівнює p. позначимо довжину однієї з сторін прямокутника через x, тоді довжина другої сторони дорівнює

$\frac{p-2x}{2}=\frac{p}{2}-x$. Позначивши площу прямокутника через y, маємо

$$y=x\left(\frac{p}{2}-x\right)=\frac{p}{2}x-x^2, \quad \left(0<x<\frac{p}{2}\right).$$

Дослідимо функцію на максимум і мінімум за допомогою другої похідної:

$$y'=\frac{p}{2}-2x; \quad \frac{p}{2}-2x=0, \quad x=\frac{p}{4}; \quad y''=-2.$$

Друга похідна від'ємна, отже, функція має максимум при $x=p/4$. таким чином, з усіх прямокутників даного периметра найбільшу площу має квадрат.

Питання для опитування:

- Яка функція називається зростаючою (спадною) на проміжку?
- Як знайти проміжки зростання (спадання) функції?
- Що таке нулі функції?
- Що називається екстремумом функції?
- Сформулюйте правило дослідження функції на екстремум.
- Яка крива називається опуклою (вгнутою) на інтервалі?
- Дайте означення точок перегину.
- Сформулюйте правило знаходження інтервалів опуклості, вгнутості та точок перегину.
- Як знайти найбільше й найменше значення функції на відрізку?
- Обґрунтуйте формулу для наближеного обчислення значення функції за допомогою диференціала.