Лекція № 11.

Тема: Поняття функції багатьох змінних. Диференціювання функцій двох змінних. Знаходження екстремумів.

План:

1. **Функції багатьох змінних, способи їх задання, границя та неперервність функції багатьох змінних.**
2. **Частинні похідні та диференціали першого порядку.**
3. **Частинні похідні вищих порядків.**
4. **Максимум і мінімум функції багатьох змінних.**
5. **Умовний екстремум. Метод множників Лагранжа.**

1. Функції багатьох змінних, способи їх задання, границя та неперервність функції багатьох змінних.

Означення. Якщо кожній точці $P(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ множини D n-вимірного простору поставлено у відповідність за деяким законом одне і тільки одне дійсне число $z \in E \subset R$, то кажуть, що в області $D \subset R^n$ задано функцію n незалежних змінних $z = f(x_1;\ x_2;\ \ldots; x_n)$. При цьому D називають *областю визначення функції*, E — *областю значень функції*.

Згідно з означенням функцію $z = f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ можна розглядати як функцію точки і записувати $z = f(P)$.

Зокрема, при n=2 говорять, що задана функція двох змінних $z = f(x; y)$, якщо кожній парі $(x; y) \in D$ на площині поставлено у відповідність тільки одне число z.

Способи задання функції

Як і функцію однієї змінної, функції багатьох змінних можна задати:

- *аналітично* (у вигляді формули), наприклад: $z = x(y^2 + 2x)$,
- *таблично* (у вигляді таблиці), наприклад:

x \ y	1	2	3
1	1	2	3
2	2	4	6

таблицею задана функція $z = xy$;

- *графічно*. *Графічним зображенням функції* $z = f(x; y)$ є поверхня у тривимірному просторі. Наприклад, графічним зображенням функції $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ є півкуля (рис. 1).

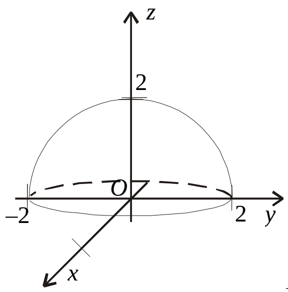

Рис. 1

Геометрична інтерпретація функцій двох змінних.

Для прикладних питань економіки має суттєве значення розгляд функції двох незалежних змінних.

Наведемо приклади функцій двох змінних.

Приклад 1. Витратами на виробництво даного виробу при даній техніці виробництва є функція матеріальних витрат *x* і витрат на оплату робочої сили *y*: $z = f(x;\ y)$. Це є функція *витрат виробництва*.

Приклад 2. Розглянемо функцію двох незалежних змінних *K*, *L*, яка називається *функцією виробництва*, або *функцією Кобба—Дугласа*, де *K* —

кількість капіталу, L — кількість праці, яку вкладено у виробництво $P = \text{const} K^{\alpha} L^{\beta}$, $\alpha + \beta = 1$.

Приклад 3. Припустимо, що предметами споживання будуть два товари *A* та *B*, ціни яких відповідно становлять p_1 та p_2. Якщо ціни інших товарів сталі, а прибуток споживачів та структура споживань не змінюються, то попит і пропозиція кожного з товарів залежить від їх цін.

Маємо функцію попиту на товар *A*: $g_1 = f_1(p_1; p_2)$; функцію попиту на товар *B*: $g_2 = f_2(p_1; p_2)$; функцію пропозиції товару *A*: $s_1 = f_3(p_1; p_2)$; функцію пропозиції товару *B*: $s_2 = f_4(p_1; p_2)$.

Нехай задана функція двох змінних $z = f(x; y)$. Областю визначення $D(f)$ такої функції вважається множина всіх точок площини *Oxy*, для яких задана формула має зміст.

Лінію, що обмежує область D, називають *межею області визначення*. Точки області, які не лежать на її межі, називаються *внутрішніми*. Область, яка містить одні внутрішні точки, називається *відкритою*. Якщо ж до області визначення належать і всі точки межі, то така область називається *замкненою*.

Для того, щоб графічно зобразити функцію двох змінних $z = f(x;\ y)$, будуємо прямокутну систему координат у просторі *Oxyz* (рис.2).

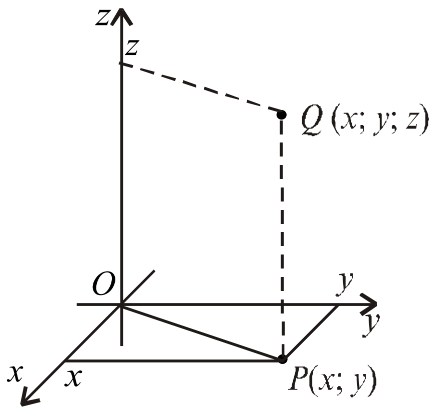

Рис. 2

Кожній парі чисел x та y відповідає точка $P(x;y)$ площини Oxy. У точці $P(x;y)$ проводимо пряму, перпендикулярну до площини Oxy, та позначаємо на ній відповідне значення функції z; дістаємо в просторі точку Q з координатами $(x;y;z)$, яка позначається символом $Q(x;y;z)$. Точки Q, які відповідають різним значенням незалежних змінних, утворюють певну поверхню у просторі. Така поверхня є *графічним зображенням функції* $z=f(x;y)$.

Зауваження. На практиці побудувати графік функції важко, адже йдеться про зображення на площині просторової фігури, а це не завжди вдається.

Існує й інший спосіб геометричного зображення функції двох змінних – зображення за допомогою *ліній рівня*.

Означення. *Лінією рівня* називається множина всіх точок площини, в яких функція $z=f(x;y)$ набуває однакових значень.

Рівняння ліній рівня записують у вигляді $f(x;y)=C$.

Накресливши кілька ліній рівня та зазначивши, яких значень набуває на них функція, дістанемо наближене уявлення про зміну функції. Елементарний приклад зображення функції за допомогою ліній рівня є зображення рельєфу місцевості на географічній карті. Висота місцевості над рівнем моря є функцією координат точки земної поверхні. За лініями рівня висоти, нанесеними на карту, легко уявити собі рельєф даної місцевості.

Приклад 4. Знайти область визначення функції $z=\ln\left(4-x^2-y^2\right)/\sqrt{4x-y}$ та надати їй геометричну інтерпретацію.

Розв’язання.

1. Знайдемо область визначення функції аналітично

$$D=\left\{(x;y)\in R^2 \middle| 4-x^2-y^2>0,\quad 4x>y\right\}.$$

2. Нерівності в D замінюємо рівностями і будуємо лінії, що їм відповідають на координатній площині, а саме: $x^2+y^2=4$; $y=4x$.

3. Визначаємо за допомогою контрольних точок $P_1\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$, $P_2(1;2)$ розміщення D на площині і заштриховуємо її (рис. 3).

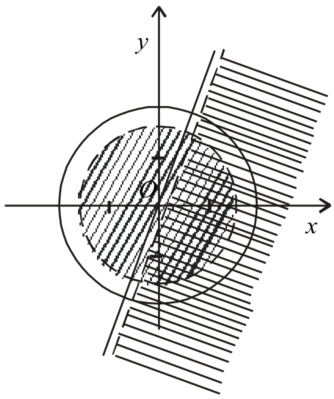

Рис. 3

$$\left.\begin{array}{c}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{9}{4}=\frac{10}{4}<4\\ 4\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{2}>0\end{array}\right\}\Rightarrow P_1\in D$$

$$\left.\begin{array}{c}1^2+2^2=5>4\\ 4>2\end{array}\right\}\Rightarrow P_2\overline{\in}D.$$

Границя та неперервність функції двох змінних.

Означення. Число B називається *границею функції* $z=f(x;y)$ при $x\to x_0$, $y\to y_0$, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ існує число $\delta>0$ таке, що при виконанні нерівності $0<(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2$ виконується нерівність $|f(x;y)-B|<\varepsilon$ і позначається $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)}f(x;y)=B$ або $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x;y)=B$.

Зауваження. Для функції двох змінних справедливі теореми про границю суми, добутку та частки, які аналогічні відповідним теоремам для функції однієї незалежної змінної.

Теорема 1. *Якщо функція* $z=f(x;\,y)$ *має границю при* $(x;\,y)\to(x_0;\,y_0)$, *то вона єдина.*

Теорема 2. *Якщо функція* $z = f(x;\ y)$ *має границю при* $(x;\ y) \to (x_0;\ y_0)$, *то вона обмежена в деякому околі точки* $(x_0;\ y_0)$.

Теорема 3. *Якщо* $\lim\limits_{(x;\ y)\to(x_0;\ y_0)} f(x;\ y) = b$, $\lim\limits_{(x;\ y)\to(x_0;\ y_0)} g(x;\ y) = c$ *і в деякому околі точки* $(x_0;\ y_0)$ *виконується нерівність* $f(x;\ y) \le g(x;\ y)$, *то* $b \le c$.

Теорема 4. *Нехай* $\lim\limits_{(x;\ y)\to(x_0;\ y_0)} f(x;\ y) = b$, $\lim\limits_{(x;\ y)\to(x_0;\ y_0)} g(x;\ y) = c$. *Тоді:*

1) $\lim\limits_{(x;\ y)\to(x_0;\ y_0)} \left(f(x;\ y) + g(x;\ y)\right) = b + c$;

2) $\lim\limits_{(x;\ y)\to(x_0;\ y_0)} f(x;\ y) \cdot g(x;\ y) = b \cdot c$;

3) $\lim\limits_{(x;\ y)\to(x_0;\ y_0)} \dfrac{f(x;\ y)}{g(x;\ y)} = \dfrac{b}{c} \quad (c \ne 0)$.

Приклад 5. Обчислити $\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} \dfrac{x^2 + y^3}{2x - 3y}$.

Розв'язання.

Згідно з теоремами про арифметичні операції з границями, а також те, що границя сталої дорівнює сталій, тобто $\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} x = 1$, $\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} y = 2$, маємо

$$\lim_{(x;y)\to(1;2)} \frac{x^2 + y^3}{2x - 3y} = \frac{\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} \left(x^2 + y^3\right)}{\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} (2x - 3y)} = \frac{\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} x^2 + \lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} y^3}{\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} 2x - \lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} 3 \cdot y} = \frac{1 + 2^3}{2 - 3 \cdot 2} = -\frac{9}{4}.$$

Зауваження. Між поняттями границі в точці для функції однієї змінної та функції двох змінних є багато спільного, але є й принципова відмінність, яка робить поняття границі функції кількох змінних суттєво більш обмеженим, ніж поняття границі функції однієї змінної.

Річ у тім, що коли $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ ($f(x)$ — функція однієї змінної), то це означає, що і лівостороння і правостороння границі дорівнюють b. Правильним є й обернене: з існування та збігу двох односторонніх границь випливає існування границі функції в точці.

Для функції двох змінних $z = f(x; y)$ наближатися до точки $(x_0;\ y_0)$ можна нескінченною множиною способів: і справа, і зліва, і зверху, і знизу, і під кутом 30° до осі Ox тощо (рис. 4).

Більше того, до точки можна наближатися не тільки по прямій, а й по більш складних траєкторіях (рис. 5).

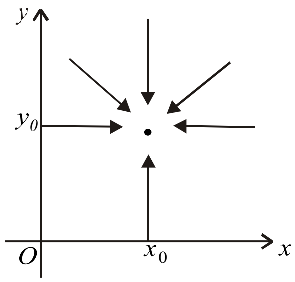

Рис. 4

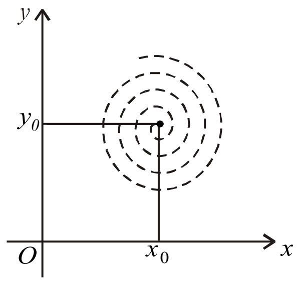

Рис. 5

Очевидно, що рівність $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x;y) = b$ правильна тоді й тільки тоді, коли границя дорівнює b при наближенні до точки $(x_0;y_0)$ по будь-якій траєкторії. Це суттєво більш обмежене, ніж збіг двох односторонніх границь у випадку функції однієї змінної.

Приклад 6. Довести, що $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ не існує.

Розв’язання.

Будемо наближатися до точки (0;0) по прямій $y = kx$. Якщо $y = kx$, тоді

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{xkx}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}.$$

Зауважимо, що значення границі залежить від кутового коефіцієнта прямої, наприклад:

при $k=1$ границя дорівнює $1/2$.

при $k=2$ границя дорівнює $2/5$ і т. п.

Таким чином, якщо наближатися до точки (0;0) з різних напрямків, то дістанемо різні значення, тобто границі $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ не існує.

Теорема 5. *Якщо існує (скінченна або ні) подвійна границя* $A=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x;\ y)$ *і при будь-якому y з Y існує (скінченна) звичайна границя по x* $\varphi(y)=\lim\limits_{x\to a} f(x;\ y)$, *то існує повторна границя* $\lim\limits_{y\to b}\varphi(y)=\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x;\ y)$, *яка дорівнює подвійній границі.*

Зауваження. Повторні границі не обов'язково рівні і навіть, одночасно можуть не існувати.

Приклад 7. Нехай $f(x;\ y)=\dfrac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$ і a=b=0, тоді:

$$\varphi(y)=\lim_{x\to 0} f(x;\ y)=y-1,\ \lim_{y\to 0}\varphi(y)=\lim_{y\to 0}\ \lim_{x\to 0} f(x;\ y)=-1,$$

але водночас

$$\varphi(x)=\lim_{y\to 0} f(x;\ y)=x+1,\ \lim_{x\to 0}\varphi(x)=\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x;\ y)=1.$$

Отже, $1\neq -1$.

Неперервність функції двох змінних.

Означення. Функція $z=f(x;y)$ називається *неперервною* в точці $P_0(x_0;y_0)$, якщо $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)=f(x_0;y_0)$.

Означення. Функція $z=f(x;y)$ називається *неперервною* в області (замкненій чи відкритій), якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

Приклад 8. Розглянемо функцію двох незалежних змінних

$$f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x^2+y^2>0)\\ 0, & (x^2+y^2=0)\end{cases}$$

Ця функція має розрив у точці (0;0), бо в точці для функції $f(x;y)$ границі не існує (див. приклад в 6).

Зауваження. Функція, що розглядається, не є неперервною в точці (0;0) по двох змінних водночас, але є неперервною по змінних *x* та *y* окремо.

Властивості неперервної функції двох змінних.

Теорема 6. *Якщо функція неперервна в точці, то вона обмежена деяким околом цієї точки.*

Теорема 7. *Якщо функції* $f(x;y)$ *та* $g(x;y)$ *неперервні в точці* $(x_0;y_0)$, *то в цій точці будуть неперервними* $f(x;y)\pm g(x;y)$, $f(x;y)\cdot g(x;y)$, $f(x;y)/g(x;y)$ *при* $g(x_0;y_0)\neq 0$.

Теорема 8. *Якщо функція* $f(x;y)$ *неперервна на замкненій обмеженій множині, то вона обмежена на цій множині.*

Теорема 9. *Якщо функція* $f(x;y)$ *неперервна на замкненій обмеженій множині, то серед її значень на цій множині є як найменші, так і найбільші.*

Теорема 10. *(про нуль неперервної функції). Нехай функція* $f(x;y)$ *неперервна на зв'язній множині D і набуває у двох точках A і B цієї множини значень різних знаків. Тоді у множині D знайдеться така точка, що в ній функція перетворюється на нуль.*

2. Частинні похідні та диференціали першого порядку.

Нехай функція $z=f(x;y)$ визначена в деякому околі точки $P_0(x_0;y_0)$. Надамо незалежним змінним x та y приросту відповідно Δx та Δy так, щоб точка $P(x_0+\Delta x;\ y_0+\Delta y)$ не виходила за межі вказаного околу. Тоді й точки $K(x_0+\Delta x; y_0)$, $M(x_0;y_0+\Delta y)$ також належатимуть розглядуваному околу (рис.6).

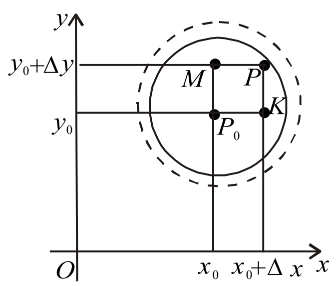

Рис. 6

Означення. Різницю $f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y)-f(x_0; y_0)$ *називають повним приростом* функції $z=f(x;y)$ при переході від точки $(x_0;y_0)$ до точки $(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y)$ і позначають Δz. Різницю $f(x_0+\Delta x; y_0)-f(x_0; y_0)$ називають *частинним приростом за x*, а різницю $f(x_0; y_0+\Delta y)-f(x_0; y_0)$ — *частинним приростом за y* функції $z=f(x;y)$; їх позначають відповідно $\Delta_x z$ і $\Delta_y z$. Таким чином,

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y)-f(x_0; y_0),$$

$$\Delta_x z = f(x_0+\Delta x; y_0)-f(x_0; y_0),$$

$$\Delta_y z = f(x_0; y_0+\Delta y)-f(x_0; y_0).$$

Означення. Функція $z=f(x;y)$ називається *диференційовною* у точці $(x_0;y_0)$, якщо її повний приріст Δz можна подати у вигляді:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

де A, B — числа, α, β — нескінченно малі при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Головна лінійна частина приросту функції, тобто $A\Delta x + B\Delta y$, називається *повним диференціалом функції* (точніше першим диференціалом) двох змінних $f(x;\ y)$ у точці $(x_0,\ y_0)$ і позначається dz:

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

Означення. Нехай функція $z=f(x;\ y)$ визначена в точці $(x_0;\ y_0)$ і в її деякому околі. *Частинною похідною* по змінній x від функції $z=f(x;\ y)$, називають границю відношення частинного приросту $\Delta_x z$ до приросту Δx,при $\Delta x \to 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

і позначають $\frac{\partial z}{\partial x}$, або $\frac{\partial f}{\partial x}$, або z'_x, або f'_x.

Аналогічно, частинна похідна по y від функції $z=f(x;\ y)$ визначається

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

і позначають $\frac{\partial z}{\partial y}$, або $\frac{\partial f}{\partial y}$, або z'_y, або f'_y.

Із означення частинних похідних зрозуміло, що вони шукаються за тими правилами, що й похідні функції однієї змінної. Треба лише пам'ятати, що при знаходженні z'_x y вважається **сталою**, а при знаходженні z'_y змінна x вважається **сталою**.

Теорема 12 (необхідна умова диференційовності функції $z=f(x;\ y)$ в точці). *Якщо функція $z=f(x;\ y)$ диференційовна в точці $(x_0;\ y_0)$, то в цій точці існують частинні похідні z'_x і z'_y.*

Диференціали незалежних змінних збігаються з їхніми приростами: $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$. Тоді, як випливає із означення повного диференціала і теореми 12, повний диференціал функції $z=f(x;y)$ можна обчислити за формулою

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Геометричний зміст частинних похідних.

Якщо функцію $z=f(x;y)$, що має частинні похідні в точці $(x_0;\ y_0)$, розглядати за умови $y=y_0$, то геометрично це означає, що поверхня $z=f(x;y)$ перетинається площиною $y=y_0$, паралельно координатній площині Oxz; у перерізі дістаємо лінію. Тоді $f'_x(x_0;y_0)$ є *кутовим коефіцієнтом дотичної* до *зазначеного перерізу* в точці $(x_0;\ y_0)$, тобто *тангенсом* кута нахилу цієї дотичної до *додатного напряму* осі Ox.

Аналогічно, $f'_y(x_0;\ y_0)$ є кутовим коефіцієнтом дотичної, що проходить через точку $(x_0;\ y_0)$, до кривої, яка утворюється в результаті перетину поверхні $z=f(x;\ y)$ з площиною $x=x_0$.

Приклад 9. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ для функції $z = x^3 y + \sin\left(x^2 + \sqrt{y}\right) + \operatorname{tg} x + \ln y$.

Розв'язання.

Знайдемо $\frac{\partial z}{\partial x}$. Вважаючи, що $y = \text{const}$, дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y + \cos\left(x^2 + \sqrt{y}\right) \cdot 2x + \frac{1}{\cos^2 x}.$$

При знаходженні $\frac{\partial z}{\partial y}$ вважаємо, що $x = \text{const}$. Дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + \cos\left(x^2 + \sqrt{y}\right)\frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{y}.$$

Приклад 10. Знайти z'_x і z'_y для функції $z = x^2 y + xy^2$.

Розв'язання.

Знайдемо z'_x, вважаючи $y = \text{const}$:

$$z'_x = 2xy + y^2.$$

Знайдемо z'_y, вважаючи $x = \text{const}$:

$$z'_y = x^2 + 2xy.$$

Приклад 11. Знайти повний диференціал для функції $z = \ln(x + \ln y)$.

Розв'язання.

Повний диференціал функції двох змінних знаходиться за формулою

$$dz = z'_x dx + z'_y dy, \text{ де}$$

$$z'_x = \frac{1}{x + \ln y}; \quad z'_y = \frac{1}{x + \ln y} \cdot \frac{1}{y}.$$

Отже, $dz = \frac{1}{x + \ln y}\left(dx + \frac{1}{y} dy\right)$.

3. Частинні похідні вищих порядків.

Нехай маємо функцію $z = f(x;\ y)$. Частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x} = f_x^{'}(x, y)$ та $\frac{\partial z}{\partial y} = f_y^{'}(x, y)$ взагалі кажучи, є функціями від *x* та *y*. Тому від них теж можна брати частинні похідні , як по *x* так і по *y:*

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f_{xx}^{''}(x, y)$ – друга похідна по *x;*

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f_{yx}^{''}(x, y)$– спочатку функцію диференціюємо по *y*, а потім отриману функцію диференціюємо по *x* (змішана частина похідна).

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f_{xy}^{''}(x, y)$– спочатку функцію диференціюємо по *x*, а потім отриману функцію диференціюємо по *y*.

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f_{yy}^{''}(x, y)$ – друга похідна по *y*.

Аналогічно визначаються і позначаються частинні похідні третього і вищих порядків

Теорема 13. *Якщо функція* $z = f(x;\ y)$ *і її частинні похідні* $f_x^{'}$, $f_y^{'}$, $f_{yx}^{''}$, $f_{xy}^{''}$ *визначені і неперервні в точці M(x,y) , то в деякому околі цієї точки*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \quad (\, f_{yx}^{''} = f_{xy}^{''}\,)$$

Означення. *Диференціалом другого порядку* від функції $z = f(x; y)$ називається диференціал від її повного диференціала першого порядку, тобто $d^2 z = d(dz)$.

Аналогічно визначаються диференціали третього і вищих порядків

Приклад 12. Знайти частинні похідні першого та другого порядків для заданої функції

$$z = \ln\left(x + 5y^2\right)$$

Розв’язання.

Спочатку знайдемо частинні похідні першого порядку для заданої функції

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x+5y^2}\cdot\left(x+5y^2\right)'_x=\frac{1}{x+5y^2}\cdot(1+0)=\frac{1}{x+5y^2};$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x+5y^2}\cdot\left(x+5y^2\right)'_y=\frac{1}{x+5y^2}\cdot(0+10y)=\frac{10y}{x+5y^2}.$$

Знайдемо частинні похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(\frac{1}{x+5y^2}\right)'_x=-\frac{1}{\left(x+5y^2\right)^2};$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(\frac{1}{x+5y^2}\right)'_y=-\frac{1}{\left(x+5y^2\right)^2}\cdot(1+10y)=-\frac{1+10y}{\left(x+5y^2\right)^2};$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\left(\frac{10y}{x+5y^2}\right)'_x=-\frac{10y}{\left(x+5y^2\right)^2}\cdot 1=-\frac{10y}{\left(x+5y^2\right)^2};$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{10y}{x+5y^2}\right)'_y=\frac{10\left(x+5y^2\right)-10y\cdot 10y}{\left(x+5y^2\right)^2}=\frac{10x+50y^2-100y^2}{\left(x+5y^2\right)^2}=\frac{10x-50y^2}{\left(x+5y^2\right)^2}.$$

Приклад 13. Перевірити рівність $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ для функції $z=x^2y+y^3$.

Розв’язання.

Знайдемо спочатку частинні похідні першого порядку

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy;\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=x^2+3y^2.$$

Знайдемо похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ і порівняємо їх

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x,\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=2x+0=2x.$$

Як бачимо $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=2x$.

4.Максимум і мінімум функції багатьох змінних.

Означення. Нехай функція $z=f(x;y)$ визначена в деякому околі точки $(x_0;\ y_0)$ і неперервна в цій точці. Якщо для всіх точок $(x;\ y)$ цього околу виконується нерівність $f(x;\ y)\le f(x_0;\ y_0)$ $[f(x;\ y)\ge f(x_0;\ y_0)]$, тоді ця точка $(x_0,\ y_0)$ називається *точкою максимуму* (*мінімуму*) функції $z=f(x;\ y)$.

Точки максимуму й мінімуму називаються *точками екстремуму*.

Теорема 14 (необхідна умова екстремуму). *Якщо функція $z=f(x;y)$ має екстремум у точці (x_0,y_0), тоді в цій точці частинні похідні першого порядку $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ або дорівнюють нулю, або хоча б одна з них не існує.*

Теорема 15 (достатня умова екстремуму). *Нехай функція $z=f(x;y)$ має екстремум у точці $(x_0;\ y_0)$ неперервні частинні похідні першого й другого порядку, причому $f'_x(x_0;y_0)=0$ та $f'_y(x_0;y_0)=0$, а також $f''_{x^2}(x_0;y_0)=A$, $f''_{xy}(x_0;y_0)=B$, $f''_{y^2}(x_0;y_0)=C$. Якщо:*

1) $AC-B^2>0$ і $A<0$, тоді $(x_0;\ y_0)$ точка максимуму функції $z=f(x;y)$;

2) $AC-B^2>0$ і $A>0$, тоді $(x_0;\ y_0)$ точка мінімуму функції $z=f(x;y)$;

3) $AC-B^2<0$, тоді в точці $(x_0;y_0)$ немає екстремуму.

4) $AC-B^2=0$, тоді потрібні додаткові дослідження.

Алгоритм дослідження функції $z=f(x;y)$ на екстремум:

1. Знайти перші частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$.

2. Знайти стаціонарні точки, тобто точки, в яких $\frac{\partial z}{\partial x}=0$, $\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

3. Знайти частинні похідні другого порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

4. Обчислити значення частинних похідних другого порядку в стаціонарних точках.

5. Для кожної стаціонарної точки знайти $\Delta=AC-B^2$ і зробити висновки на базі теореми 15.

Приклад 14. Дослідити на екстремум функцію

$$z=x^2-xy+y^2+3x-2y+1.$$

Розв'язання.

Спочатку знайдемо критичні точки, тобто точки в яких частинні похідні першого порядку рівні нулю

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 3;$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y - 2.$$

$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ -x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{4}{3} \\ y = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Знайдемо значення других похідних в критичній точці $M_0\left(-\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{M_0} = 2; \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big|_{M_0} = -1; \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{M_0} = 2.$$

Обчислимо $AC - B^2 = 2 \cdot 2 - (-1)^2 = 3 > 0$, причому $A > 0$.

Отже в точці M_0 функція має мінімум.

$$Z_{\min} = z\left(-\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) - 2\cdot\frac{1}{3} + 1 = -\frac{4}{3}$$

Відповідь. $Z_{\min} = z\left(-\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{3}$.

5. Умовний екстремум. Метод множників Лагранжа.

В багатьох економічних задачах питання відшукання екстремуму функції кількох змінних (які взагалі кажучи, не є незалежними) пов'язані з появою деяких додаткових умов. Наприклад, якщо функція описує валовий збір зерна, то засіяні площі, внесення добрив, витрати на паливо тощо, вносять деякі обмеження на незалежні змінні.

Розглянемо питання про умовний екстремум функції двох змінних, якщо ці змінні зв'язані однією умовою.

Нехай потрібно знайти екстремум функції

$$z = f(x;y) \qquad (1)$$

за умови, що x і y зв'язані рівнянням

$$\varphi(x,y)=0. \qquad (2)$$

Означення. Рівняння (2) називають *рівнянням зв'язку*. Точку $(x_0;y_0)$ називають *точкою умовного строгого максимуму* функції $z=f(x;y)$ відносно рівняння зв'язку (2), якщо існує такий окіл точки $(x_0;\ y_0)$, для всіх точок якого $(x;y)\neq(x_0;y_0)$, що задовольняють рівняння зв'язку, справджується нерівність $f(x;\ y)<f(x_0;\ y_0)$.

Якщо за таких умов виконується $f(x;\ y)>f(x_0;\ y_0)$, тоді точку $(x_0;\ y_0)$ називають *точкою умовного строгого мінімуму* функції $z=f(x;y)$ при обмеженнях (2).

Аналогічно вводяться поняття нестрогого умовного екстремуму.

Точки умовного максимуму та мінімуму називають точками *умовного екстремуму*. Умовний екстремум інколи називають *відносним екстремумом*.

Якщо б рівняння (2) розв'язувалось, наприклад, відносно y, то підставивши його в (1), отримаємо функцію однієї змінної, яку досліджуємо відомими методами. Але можна розв'язати задачу, не знаходячи y з рівності *(2)*. Із *(1)* знаходимо $\frac{\partial z}{\partial x}$, пам'ятаючи що y є функцією від x

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

Тоді в точках екстремуму

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0 \qquad (3)$$

Із рівності (2) знаходимо

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0 \qquad (4)$$

Помноживши (4) на поки невідомий коефіцієнт λ і додавши його до (3), отримаємо:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)=0$$

або

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx}=0 \qquad (5)$$

Рівність (5) виконується у всіх точках екстремуму. Підберемо так, щоб для всіх *x* і *y,* які відповідають екстремуму функції *z*, друга дужка дорівнювала б нулю

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0$$

Тоді при цих значеннях

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}=0.$$

Таким чином маємо, що в точках екстремуму задовольняється три рівняння з трьома невідомими

$$\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}=0\\ \varphi(x,y)=0\end{array} \qquad (6)$$

Рівняння (6) є необхідною умовою екстремуму функції (1) за умови (2).

Теорема 22. (Необхідна умова існування умовного екстремуму.) *Для того щоб точка* $(x_0;\, y_0)$ *була точкою умовного екстремуму функції* $z=f(x;y)$ *при рівнянні зв'язку* $\varphi(x;\,y)=0$, *необхідно, щоб її координати при деяких значеннях* λ *задовольняли систему рівнянь:*

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L(x;y)}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial L(x;y)}{\partial y}=0\\ \varphi(x;y)=0.\end{cases}$$

Ці умови означають, що точка (x_0, y_0) є стаціонарною точкою функції Лагранжа і її координати задовольняють рівняння зв'язку.

При розв'язанні конкретних задач, деколи вдається встановити характер критичної точки, виходячи із суті задачі. Зауважимо, що ліві частини рівнянь (6) є частинними похідними так званої *функції Лагранжа.*

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y) \qquad (7)$$

за змінними *x, y,* λ (параметр λ називається *множником Лагранжа)*

Теорема 16. (Достатня умова умовного екстремуму.) *Нехай функції* $z = f(x;\, y)$, $v = \varphi(x;\, y)$ *подвійно неперервно диференційовні в околі точки* $(x_0;\, y_0)$ *і нехай у цій точці виконуються необхідні умови існування екстремуму функції* $f(x;\, y)$ *при обмеженні* $\varphi(x;\, y) = 0$. *Тоді якщо за умови*

$$d\varphi(x_0, y_0) = \frac{\partial\varphi(x_0, y_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi(x_0, y_0)}{\partial y}dy = 0,\ dx^2 + dy^2 > 0 \qquad (7)$$

другий диференціал $d^2L(x_0; y_0)$ *функції Лагранжа є додатно (від'ємно) визначеною квадратичною формою, то функція* $z = f(x;\, y)$ *у точці* $(x_0;\, y_0)$ *має умовний строгий мінімум (максимум).*

Якщо за умов (7) другий диференціал $d^2L(x_0;\, y_0)$ є невизначеною квадратичною формою, то в точці $(x_0;\, y_0)$ умовного екстремуму немає.

Приклад 15. Знайти умовний екстремум функції

$$z = (x-2)^2 + (y-3)^2,\ x+y=7.$$

Розв'язання.

Складемо функцію Лагранжа.

$$Z(x, y, \lambda) = (x-2)^2 + (y-3)^2 + \lambda(x + y - 7)$$

Знайдемо частинні похідні першого порядку та розв'яжемо систему рівнянь

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 2(x-2) + \lambda; \qquad \frac{\partial Z}{\partial y} = 2(y-3) + \lambda; \qquad \frac{\partial Z}{\partial \lambda} = x + y - 7.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial x} = 2(x-2) + \lambda = 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial y} = 2(y-3) + \lambda = 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial \lambda} = x + y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

Отримали критичну точку функції $P(3;4)$. Визначимо її характер. Знайдемо

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_P = 2 > 0; \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big|_P = 0; \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_P = 2 > 0.$$

Обчислимо $AC - B^2 = 2 \cdot 2 - (0)^2 = 4 > 0$, причому $A > 0$. Отже в точці $P(3;4)$ функція має мінімум.

$Z_{\min} = z(3;4) = (3-2)^2 + (4-3)^2 = 1 + 1 = 2$

Відповідь. $Z_{\min} = z(3;4) = 2$.

Питання для опитування:

- Що називається функцією багатьох змінних, двох змінних?
- Які є способи задання функції багатьох змінних?
- Що називається областю визначення функції і який її геометричний зміст?
- Що являє собою графік функції $z = f(x;y)$?
- Що називається лінією рівня функції $z = f(x;y)$?
- Дати означення границі функції двох змінних в точці.
- Що називається неперервною функцією двох змінних на множині точок?
- Дати означення частинної похідної функції двох змінних по одній з них? З'ясувати її геометричний зміст.
- Як визначають частинні похідні другого порядку від функції двох змінних?

- Сформулювати теорему про рівність других мішаних похідних.
- Дати означення повного диференціала функції двох змінних і вказати формулу для його знаходження.
- Що називається точкою максимуму (мінімуму) функції багатьох змінних?
- Сформулювати теорему про необхідні умови локального екстремуму функції багатьох змінних.
- Як формулюється достатня умова існування локального екстремуму функції багатьох змінних?
- Дати означення умовного екстремуму.
- Охарактеризувати метод множників Лагранжа.