Лекція № 12.

Тема: Первісна. Невизначений інтеграл та його властивості. Основні методи інтегрування.

План:

1. Поняття первісної та невизначеного інтегралу.

2. Основні властивості невизначеного інтеграла.

3. Таблиця інтегралів.

4. Основні методи інтегрування:

- **метод безпосереднього інтегрування.**
- **метод підстановки (заміни змінної).**
- **метод інтегрування частинами.**

Інтеграл – одне з центральних понять математичного аналізу і всієї математики. Воно виникло у зв'язку з двома основними задачами:

1. Про відновлення функцій по заданій похідній,
2. Про обчислення площі, обмеженої графіком функції $y=f(x)$, $x\epsilon[a,b]$, прямими $x=a$, $x=b$ і віссю Ox.

Вказані дві задачі приводять до двох пов'язаних між собою видів інтегралів: невизначеного і визначеного. Вивчення властивостей і обчислення цих інтегралів і складають основу інтегрального числення.

1. Поняття первісної та невизначеного інтегралу.

Означення. Функція F називається первісною для функції $f(x)$ на заданому проміжку, якщо для всіх x з цього проміжку справедлива рівність

$$F'(x) = f(x).$$

У загальному випадку, якщо *F(x)* є первісною для функції *f(x),* то для будь-якої сталої *C* функція *F(x)+C* також є первісною для функції *f(x)*. Дійсно,

$$(F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$$

для будь-якого *x* з розглядуваного проміжку.

Отже, якщо функція має хоча б одну первісну, то вона має безліч первісних, що відрізняються на довільну сталу.

Приклад. Первісні для функції $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ мають вигляд:

$$F_1(x)=\operatorname{arctg} x \text{, бо } F_1'(x)=(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x\in R;$$

$$F_2(x)=\operatorname{arctg} x + C, \text{ бо } F_2'(x)=(\operatorname{arctg} x + C)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x\in R.$$

Теорема 1 (про множину первісних). *Якщо F(x) — первісна для функції f(x) на проміжку I, то*

1) F(x)+C — також первісна для f(x) на проміжку I;

2) будь-яка первісна Ф(x) для f(x) може бути подана у вигляді Ф(x)=F(x)+C на проміжку I. (Тут C=const називається довільною сталою.)

Означення. Операція знаходження первісних для функції *f*(*x*) називається *інтегруванням f*(*x*).

Задача інтегрування функції на проміжку полягає у тому, щоб знайти всі первісні функції на цьому проміжку, або довести, що функція не має первісних на цьому проміжку.

Означення. Сукупність усіх первісних функцій *F(x)+C* для диференціала *f(x)dx* називається невизначеним інтегралом і позначається $\int f(x)dx$

@ Аграрно-економічний коледж ПДАА
МАТЕМАТИКА ON-LINE http://aekmatem.pl.ua/

Таким чином можна записати $\int f(x)dx = F(x)+C$, де $f(x)dx$ називається *підінтегральним виразом,* $f(x)dx$ –підінтегральний вираз, $\int$ - знак невизначеного інтеграла.

Геометричний зміст невизначеного інтеграла полягає в тому, що функція $y = F(x) + C$ є рівняння однопараметричної сім’ї кривих, які утворюються одна з одної паралельним перенесенням уздовж осі ординат (рис. 1).

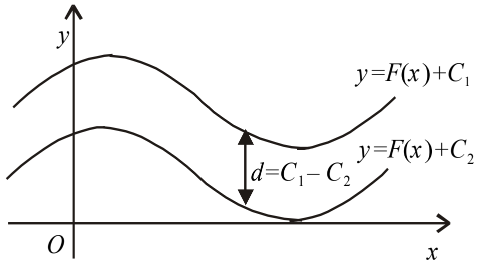

Рис. 1.

Теорема 2 (Коші). *Для існування невизначеного інтеграла для функції f(x) на певному проміжку достатньо, щоб f(x) була неперервною на цьому проміжку.*

2. Основні властивості невизначеного інтеграла.

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

2. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу

$$d\int f(x)dx = f(x)dx$$

3. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює цій функції плюс довільна стала

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

4. Сталий множник можна винести за знак інтеграла

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

@ Аграрно-економічний коледж ПДАА
МАТЕМАТИКА ON-LINE http://aekmatem.pl.ua/

5. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченого числа функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів цих функцій

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + ... + \int f_n(x)dx$$

3. Таблиця інтегралів.

1. $\int kdx = kx + C$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int \cos xdx = \sin x + C$
5. $\int \sin xdx = -\cos x + C$
6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$
8. $\int e^x dx = e^x + C$
9. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \quad a > 0$
11. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$
12. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a \neq 1$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C, \quad a \neq 0$

<u>Приклад.</u> Обчислити інтеграли:

1) $\int (5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 1)dx$

Застосовуючи п'яту і третю властивості інтеграла, а потім формулу (1) і другу властивість одержимо:

$$\int (5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 1)dx = \int 5x^4 dx - \int 4x^3 dx + \int 3x^2 dx - \int 1dx =$$
$$= 5\int x^4 dx - 4\int x^3 dx + 3\int x^2 dx - \int dx = 5\frac{x^5}{5} - 4\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} - x + C =$$
$$= x^5 - x^4 + x^3 - x + C$$

2) $\int \frac{1 \cdot dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$

@ Аграрно-економічний коледж ПДАА
МАТЕМАТИКА ON-LINE http://aekmatem.pl.ua/

$$\int \frac{1\cdot dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx = \int\left(\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\sin^2 x}+\int\frac{dx}{\cos^2 x} = -\operatorname{ctg} x+\operatorname{tg} x + C.$$

3) $\int (x+8)^{10}dx$

Використовуючи перетворення

$$\int f(ax+b)dx = \frac{a}{a}\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b),$$

знайдемо:

$$\int (x+8)^{10}dx = \frac{1}{1}\frac{(x+8)^{10+1}}{10+1}+C = \frac{(x+8)^{11}}{11}+C$$

4) $\int\sqrt{1-3x}\;dx = \frac{1}{1}\cdot\frac{\sqrt{(1-3x)^3}}{\frac{3}{2}}+C = \frac{2\sqrt{(1-3x)^3}}{3}+C$

4. Основні методи інтегрування.

Метод безпосереднього інтегрування.

Основними методами інтегрування є безпосереднє інтегрування, метод підстановки та інтегрування частинами.

Обчислення інтегралів за допомогою основних властивостей невизначеного інтеграла і таблиці інтегралів називають *безпосереднім інтегруванням.*

Приклад. Обчислити інтеграли:

1) $\int \frac{\sin x dx}{1+3\cos x} = \int\frac{d(-\cos x)}{1+3\cos x} = -\frac{1}{3}\int\frac{d(3\cos x)}{1+3\cos x} = -\frac{1}{3}\int\frac{d(1+3\cos x)}{1+3\cos x} = -\frac{1}{3}\ln|1+3\cos x|+C.$

2) $\int\frac{1\cdot dx}{x^2(1+x^2)} = \int\frac{1+x^2-x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \int\frac{dx}{x^2}-\int\frac{dx}{x^2+1} = -\frac{1}{x}-\operatorname{arctg} x + C.$

Метод підстановки (заміни змінної).

Суть цього методу полягає у введенні нової змінної інтегрування. Він ґрунтується на такій теоремі.

<u>Теорема.</u> Нехай $F(x)$ - первісна функції $f(x)$ на проміжку $\langle a;\ b\rangle$, т/б $\int f(x)dx = F(x)+C,\ x\in\langle a;\ b\rangle$, і нехай функція $x=\varphi(t)$ визначена і диференційована на проміжку $\langle \alpha;\ \beta\rangle$, причому множина значень цієї функції є проміжок $\langle a;\ b\rangle$. Тоді справедлива формула

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))+C,\ t\in\langle \alpha;\beta\rangle .$$

Теорема застосовується як правило таким чином:

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \left|\begin{matrix}\varphi(x)=u\\ \varphi'(x)dx=du\end{matrix}\right| = \int f(u)du = = F(u)+C = F(\varphi(x))+C$$

Приклад. Обчислити інтеграли:

1) $\int \sqrt{5x-3}dx$

Нехай *5x-3=z*, звідки *5dx=dz* і $dx=\frac{dz}{5}$. Підставивши в підінтегральний вираз замість *5x-3* і *dx* їх значення, замінивши корінь степенем і дробовим показником і, застосувавши формулу (1) таблиці похідних, одержимо:

$$\int \sqrt{5x-3}dx = \int \sqrt{z}\frac{dz}{5} = \frac{1}{5}\int z^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{5}\cdot\frac{z^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{15}\sqrt{z^3} + C$$

Перейшовши до початкового х, одержимо:

$$\int \sqrt{5x-3}dx = \frac{2}{15}\sqrt{(5x-3)^3} + C$$

2) $\int \frac{3x^2+e^x}{x^3+e^x}dx$

Використовуючи метод підстановки та таблицю інтегралів, дістанемо:

$$\int \frac{3x^2+e^x}{x^3+e^x}dx = \left|\begin{matrix}u=x^3+e^x\\ du=(3x^2+e^x)dx\end{matrix}\right| = \int\frac{du}{u} = \ln|u|+C = \ln\left|x^3+e^x\right|+C$$

Отриманий результат перевіримо диференціюванням

$$\left(\ln\left|x^3+e^x\right|+C\right)' = \frac{1}{x^3+e^x}\cdot\left(3x^2+e^x\right) = \frac{3x^2+e^x}{x^3+e^x}$$

@ Аграрно-економічний коледж ПДАА
МАТЕМАТИКА ON-LINE http://aekmatem.pl.ua/

Метод інтегрування частинами.

Нехай $u = u(x)$, $v = v(x)$ - функції, що мають на деякому проміжку неперервні похідні. Тоді $\int u dv = uv - \int v du$.

Іноді формулу доводиться застосовувати декілька разів. Основні типи інтегралів, які зручно обчислювати методом інтегрування за частинами:

1) $\int P(x)e^{kx}dx, \int P(x)\sin kxdx, \int P(x)\cos kxdx$, де $P(x)$- многочлен, k- дійсне число. $\Rightarrow u = P(x)$.

2) $\int P(x)\ln xdx, \int P(x)\arcsin xdx, \int P(x)\arccos xdx, \int P(x)arctgxdx \Rightarrow dv = P(x)dx$.

3) $\int e^{\alpha x}\sin \beta xdx, \int e^{\alpha x}\cos \beta xdx$, де α, β- дійсні числа. Після двократного застосування формули утворюється лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла.

Приклад. Обчислити інтеграли:

1) $\int xe^x dx$

Використавши формулу інтегрування за частинами отримаємо:

$$\int xe^x dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^x dx & v = \int e^x dx = e^x \end{vmatrix} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

2) $\int arctgxdx$

Використавши формулу інтегрування за частинами отримаємо:

$$\int arctgxdx = \begin{vmatrix} u = arctgx & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx & v = \int dx = x \end{vmatrix} = xarctgx - \int \frac{x}{1+x^2}dx = xarctgx - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C$$

Питання для опитування:

- Що називається первісною даної функції? Наведіть приклади.
- Сформулюйте основну властивість первісних.
- Дати означення невизначеного інтеграла.
- Сформулюйте властивості невизначеного інтеграла.
- На чому базується інтегрування за таблицею?
- Що таке метод безпосереднього інтегрування?
- Як застосовується метод заміни змінної у невизначеному інтегралі?
- Які типи інтегралів зручно обчислювати методом інтегрування за частинами?

@ Аграрно-економічний коледж ПДАА
МАТЕМАТИКА ON-LINE http://aekmatem.pl.ua/