Лекція № 13.

Т е м а : В и з н а ч е н и й   і н т е г р а л ,   й о г о   в л а с т и в о с т і   т а   м е т о д и   о б ч и с л е н н я .

План:

1. **Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла.**
2. **Поняття інтегральної суми та визначеного інтегралу.**
3. **Властивості визначеного інтеграла.**
4. **Методи обчислення визначеного інтеграла.**
5. **Наближені методи обчислення визначених інтегралів**

1. Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла.

Означення. *Криволінійною трапецією* називається плоска фігура, що обмежена лініями: $y = f(x) \geq 0, \;\; y = 0, \;\; x = a, \;\; x = b.$

На рис.1. зображені: класична криволінійна трапеція (*а*) та її вироджені випадки (*б*) та (*в*).

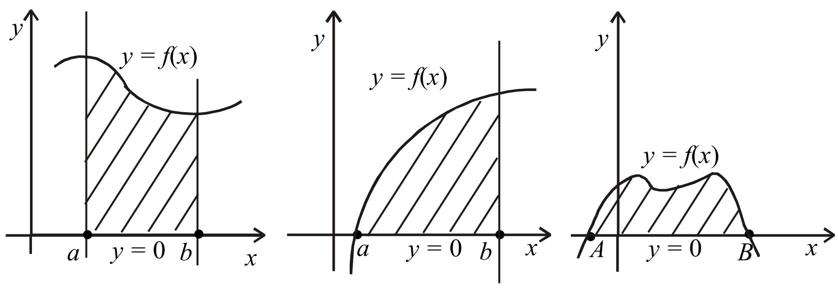

Рис. 1.

Задача 1. Обчислити площу криволінійної трапеції *aABв* (рис. 2).

Розв'язання.

Розіб'ємо проміжок $[a;\ b]$ на n частин точками $x_i,\ i=\overline{(0,\ n)}$ так що $a=x_0,\ b=x_n$. Виберемо точки ξ_i так: $x_{i-1}\le\xi_i\le x_i$. Побудуємо прямокутники з основою $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ і висотою $f(\xi_i)$ (рис. 4.3).

Площа елементарного прямокутника $\Delta S_i = f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$. Площа ступінчастої фігури $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i = S_n$ буде тим менше відрізнятись від площі криволінійної трапеції S_{aABb}, чим менша довжина $\max\Delta x_i$, а в граничному випадку ці площі будуть збігатися, тобто $S_{aBAb} = \lim\limits_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\xi_i\cdot\Delta x_i$.

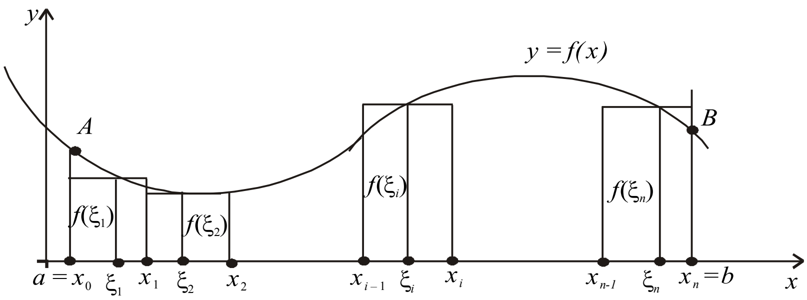

Рис. 2.

Задача 2. Обчислити роботу змінної сили $\vec{F}=\vec{e}\cdot f(x),\ |\vec{e}|=1,$ що виконується при переміщенні матеріальної точки на проміжку $x\in[a;\ b]$ (рис.3).

Розв'язання.

Розіб'ємо проміжок $[a;\ b]$ на n частин точками $x_i,\ i=\overline{(0,\ n)}$. На кожному з відрізків $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ вважатимемо, що сила стала і дорівнює $f(\xi_i)$, $x_{i-1}\le\xi_i\le x_i$ (рис.9.4).

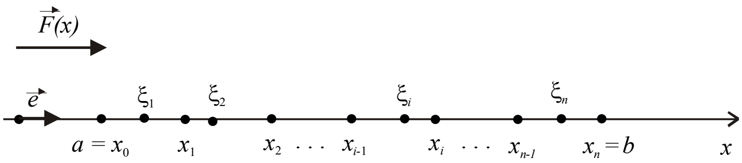

рис.3.

Елементарна робота сили на відрізку Δx_i буде $\Delta A_i = f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$. Робота A сили $\vec{F}$ на відрізку $[a;\ b]$ знаходиться тоді так:

$$A=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i.$$

@ Аграрно-економічний коледж ПДАА
МАТЕМАТИКА ON-LINE http://aekmatem.pl.ua/

2. Поняття інтегральної суми та визначеного інтегралу.

Нехай на відрізку $\langle a;\ b\rangle$ визначена функція $f(x)$. Розіб'ємо $\langle a;\ b\rangle$ на n відрізків $[x_{i-1},\ x_i]$, де $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ і $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Величина λ дорівнює максимальній з довжин відрізків $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Всередині кожного з відрізків вибираємо довільну точку ξ_i. Величину $s_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ називають *інтегральною сумою.*

Означення. Якщо існує границя інтегральної суми для $\lambda \to 0,\ n \to \infty$, яка не залежить від способу розбиття відрізка $\langle a;\ b\rangle$ і вибору точок ξ_i, то ця границя називається визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $\langle a;\ b\rangle$ і позначається символом

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ n\to\infty}} s_n = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Теорема. (Про існування визначеного інтегралу.) Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку $\langle a;\ b\rangle$, то $\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ існує і не залежить від способу розбиття відрізка $\langle a;\ b\rangle$ на часткові відрізки і від вибору точок ξ_i. В такому випадку функцію $f(x)$ називають інтегрованою на відрізку $[a; b]$. Числа a і b називають відповідно нижньою і верхньою межами інтегрування.

Означення. Функція, для якої на $[a;\ b]$ існує визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ називається *інтегровною на цьому проміжку*.

Геометричний зміст визначеного інтеграла.

Якщо $f(x) > 0$, то $\int_a^b f(x)dx$ чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = f(x),\ x = a,\ x = b,\ y = 0$.

3. Властивості визначеного інтеграла.

1. При переставлені меж визначеного інтеграла змінюється його знак на протилежний

@ Аграрно-економічний коледж ПДАА
МАТЕМАТИКА ON-LINE http://aekmatem.pl.ua/

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

2. Для будь-якої функції $y = f(x)$, $\int_a^a f(x)dx = 0$.

3. Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла.

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

4. Визначений інтеграл алгебраїчної суми скінченого числа функцій дорівнює сумі визначених інтегралів цих функцій.

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \ldots + \int_a^b f_n(x)dx$$

5. Відрізок інтегрування можна розбити на частини

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

6. Якщо $f(x) \geq 0$ і інтегровна для $x \in [a, b]$, $b > a$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

7. Якщо $f(x)$, $g(x)$— інтегровні та $f(x) \geq g(x)$ для $x \in [a, b]$, $b > a$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)\, dx.$$

8. Якщо $f(x)$ — інтегровна та $m \leq f(x) \leq M$ для $x \in [a, b]$, $b > a$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b-a).$$

9. ***Теорема 7* (*про середнє*).** Якщо функція $f(x)$ — неперервна для $x \in [a, b]$, $b > a$, то знайдеться така точка $x = c \in [a, b]$, що:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a)$$

Геометричний зміст теореми про середнє полягає в тому, що існує прямокутник із сторонами $f(c), c \in [a, b]$ та b – a, який рівновеликий криволінійній трапеції *aABв* за умови, що функція $f(x) \geq 0$ та неперервна на проміжку $[a; b]$ (рис. 4).

@ Аграрно-економічний коледж ПДАА
МАТЕМАТИКА ON-LINE http://aekmatem.pl.ua/

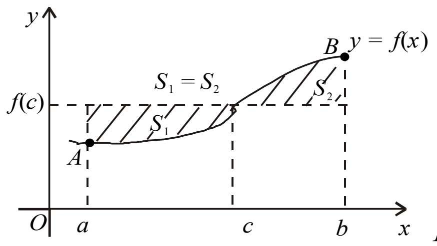

Рис. 4.

4. Методи обчислення визначеного інтеграла.

Формула Ньютона-Лейбніца. Для обчислення визначеного інтеграла від функції в тому випадку, коли можна знайти відповідний невизначений інтеграл, є формула Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Заміна змінної у визначеному інтегралі.

Теорема. Нехай функція $f(x)$ неперервна в будь-якій точці $x = \varphi(t)$, *де* $t \in [\alpha, \beta]$, і нехай $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$. Тоді якщо функція $\varphi(t)$ має неперервну похідну, то справедлива така формула:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Інтегрування частинами.

Якщо функції u(x) і v(x) неперервні на [a,b] разом із своїми першими похідними має місце формула інтегрування частинами:

$$\int_a^b udv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

<u>Приклад 1.</u> Знайти

1) $\int_1^2 x^2 dx$

Знайдемо невизначений інтеграл $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$. За формулою Ньютона-Лейбніца маємо:

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 2\frac{1}{3}$$

2) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{2\sin x}{(1-\cos x)^2}dx$

За формулою заміни змінної маємо:

$$\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{2\sin x}{(1-\cos x)^2}dx = \left| \begin{matrix} u = 1-\cos x & u_1 = 1-\cos\frac{\pi}{2} = 1 \\ du = \sin x dx & u_2 = 1-\cos\pi = 2 \end{matrix} \right| = 2\int\limits_1^2 \frac{du}{u^2} = -2u^{-1}\Big|_1^2 = -1+2 = 1$$

3) $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x dx = \left| \begin{matrix} u = x, \quad du = dx; \\ \cos 2x dx = dv, \\ v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{matrix} \right| = \left(\frac{x}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\sin\pi + \frac{1}{2}\cos\pi\right) - \left(0\cdot\sin 0 + \frac{1}{2}\cos 0\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

5. Наближені методи обчислення визначених інтегралів.

Визначений інтеграл від заданої неперервної функції далеко не завжди можна легко та точно обчислити. Однак, використовуючи геометричний зміст, можна побудувати ряд наближених формул, за допомогою яких інтеграл обчислюється з будь-якою точністю. Розглянемо такі формули.

Нехай від заданої та неперервної на $[a;\, b]$ функції $y = f(x)$ треба обчислити визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Поділимо відрізок $[a;\, b]$ точками $a{=}x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n{=}b$ на n рівних частин завдовжки $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Значення функції $f(x)$ у точках $x_i,\ i = (0, \overline{n})$ позначимо так: $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2), \ldots, y_n = f(x_n)$. Побудуємо для функції $f(x)$ на проміжку $[a;b]$ інтегральні суми, кожна з яких буде наближено подавати визначений інтеграл:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} y_i\Delta x = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i, \qquad (1)$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} y_i\Delta x = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i. \qquad (2)$$

@ Аграрно-економічний коледж ПДАА
МАТЕМАТИКА ON-LINE http://aekmatem.pl.ua/

Формули (1) та (2) називаються ***формулами лівого та правого прямокутників відповідно***. Ця назва пов’язана з тим, що криволінійна трапеція наближено замінюється відповідною ступінчастою фігурою (рис.5).

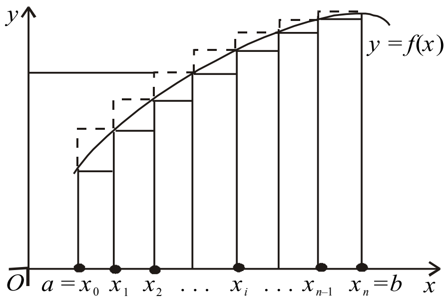

Рис. 5.

II. ***Формула трапецій***.

Більш точне значення визначеного інтеграла буде, якщо криву $y=f(x)$ замінювати не ступінчастою лінією, а вписаною ламаною, тобто криволінійна трапеція замінюється сумою *n* прямолінійних трапецій (рис. 6).

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{2}\left(y_0+y_n\right)+\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right) \qquad (3)$$

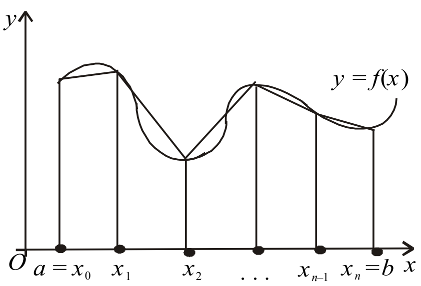

Рис. 6.

III. ***Формула Сімпсона***.

Поділимо $[a; b]$ на парне число рівних частин $n=2m$ точками x_i $i=\left(\overline{0,2m}\right)$ так, що $a=x_0$, $b=x_{2m}$. На кожному із цих проміжків криволінійну сторону трапеції, рівнянням якої є $y=f(x)$, замінюємо певною параболою. Таке наближення для обчислення визначеного інтеграла буде точнішим, ніж за попередніми формулами (рис. 7).

@ Аграрно-економічний коледж ПДАА
МАТЕМАТИКА ON-LINE http://aekmatem.pl.ua/

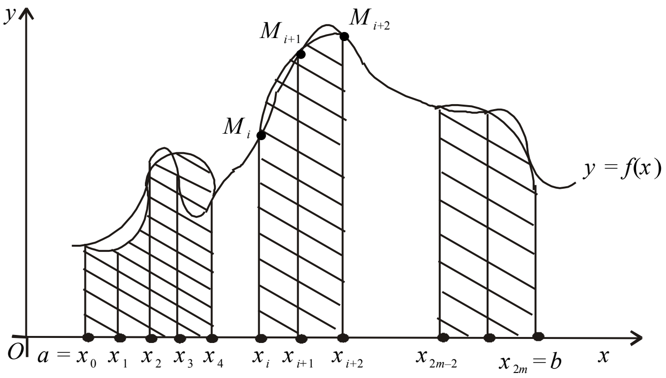

Рис. 7.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6m}\left(y_0 + y_{2m} + 2\left(y_2 + y_4 + ... + y_{2m-2}\right) + \left(y_1 + y_3 + ... + y_{2m-1}\right)\right). \qquad (4)$$

Приклад 2. Обчислити наближено при n=10 за формулами прямокутників, трапецій, Сімпсона такий інтеграл: $I = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$.

Поділимо проміжок [1; 2] на 10 рівних частин, тобто візьмемо $\Delta x = \frac{2-1}{10} = 0{,}1$ та складемо таку таблицю значень функції $y = \frac{1}{x}$:

x_i	y_i	x_i	y_i
x_0 = 1,0	y_0 = 1,00000	x_6 = 1,6	y_6 = 0,62500
x_1 = 1,1	y_1 = 0,90909	x_7 = 1,7	y_7 = 0,58824
x_2 = 1,2	y_2 = 0,83333	x_8 = 1,8	y_8 = 0,55556
x_3 = 1,3	y_3 = 0,76923	x_9 = 1,9	y_9 = 0,52632
x_4 = 1,4	y_4 = 0,71429	x_{10} = 2,0	y_{10} = 0,50000
x_5= 1,5	y_5 = 0,66667		

За формулою лівих прямокутників (n=10)

@ Аграрно-економічний коледж ПДАА
МАТЕМАТИКА ON-LINE http://aekmatem.pl.ua/

$$I \approx \frac{b-a}{10}\left(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_9\right) = 0{,}1 \cdot 7{,}18773 \approx 0{,}71877.$$

За формулою правих прямокутників (n=10)

$$I = \frac{b-a}{10}\left(y_1 + y_2 + \ldots + y_{10}\right) = 0{,}1 \cdot 6{,}68773 \approx 0{,}66877.$$

За формулою трапецій (n=10)

$$I \approx \frac{b-a}{10}\left(\frac{y_0 + y_{10}}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_9\right) = 0{,}1 \cdot 6{,}93773 \approx 0{,}69377.$$

За формулою Сімпсона n=2m=10

$$I \approx \frac{b-a}{6 \cdot 5}\left(y_0 + y_{10} + 2\left(y_2 + y_4 + y_6 + y_8\right) + 4\left(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9\right)\right) == \frac{1}{30} \cdot 20{,}79456 \approx 0{,}69315.$$

Згідно з таблицею натуральних логарифмів $I = \ln 2 \approx 0{,}693147$, і отже, найбільш точним виявилось обчислення за формулою Сімпсона.

Питання для опитування:

- Які задачі приводять до поняття визначеного інтегралу?
- Що таке криволінійна трапеція?
- Пояснити поняття інтегральної суми.
- Що називається визначеним інтегралом?
- Сформулювати теорему про існування визначеного інтеграла.
- Сформулювати властивості визначеного інтеграла.
- Записати і довести формулу Ньютона-Лейбніца.
- У чому полягає метод інтегрування частинами у визначеному інтегралі?
- Які ви знаєте наближені методи обчислення визначених інтегралів?

@ Аграрно-економічний коледж ПДАА
МАТЕМАТИКА ON-LINE http://aekmatem.pl.ua/