Лекція № 14.

Тема: Основні поняття диферен-ціальних рівнянь. Диференціальні рівняння першого порядку.

План:

1. **Основні поняття диференціальних рівнянь.**
2. **Задача Коші.**
3. **Диференціальні рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними.**
4. **Однорідні диференціальні рівняння.**
5. **Лінійні диференціальні рівняння.**

1. Основні поняття диференціальних рівнянь.

Багато фізичних законів мають вигляд диференціальних рівнянь. Інтегрування цих рівнянь – складна справа. Одні диференціальні рівняння вдається розв'язати в явному вигляді, тобто записати шукану функцію у вигляді формули. Для інших ще й досі не знайдено зручних формул. У цих випадках знаходять наближені розв'язки за допомогою ЕОМ. Диференціальні рівняння досить просто і повно описують виробничі процеси. Тому важливо не лише вміти їх розв'язувати, а й складати.

Розглянемо деякі задачі, які приводять до диференціальних рівнянь.

Задача 1. Тіло, маса якого m, вільно падає з деякої висоти. Треба встановити закон, за яким змінюється швидкість падіння $v=v(t)$, якщо на тіло, крім сили тяжіння P, діє сила опору повітря F_0, пропорційна швидкості.

Нехай F - сила, під дією якої тіло рухається із швидкістю $v=v(t)$. Ця сила складається з сили тяжіння $P=mg$ і сили опору повітря $Fo=-kv$, де $k>0$, тобто

$$F=P+Fo=mg-kv.$$

За другим законом Ньютона $F=ma$. Оскільки $a=v'(t)=\frac{dv}{dt}$, то

$$F = m\frac{dv}{dt}$$

Підставивши це значення F у попереднє рівняння, маємо диференціальне рівняння:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

Розв'язком цього рівняння буде функція виду

$$v = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$$, де С - довільна стала.

Задача 2. Дослідним шляхом встановлено, що швидкість розмноження бактерій у будь-який момент часу додатна і пропорційна їх масі. Знайти залежність маси бактерій від часу.

Позначимо через *m(t)* масу бактерій у момент часу t; тоді $\frac{dm}{dt}$ буде швидкість розмноження цих бактерій. За умовою задачі швидкість розмноження $\frac{dm}{dt}$ пропорційна масі *m(t)* бактерій, тому

$$\frac{dm}{dt} = km(t)$$, де $k>0$.

Це рівняння містить шукану функцію *m(t)* і її похідну $\frac{dm}{dt}$, значить є диференціальним. Підстановкою можна перевірити, що розв'язком цього рівняння буде функція виду $m(t)=Ce^{kt}$, де С - довільна стала.

Означення. *Диференціальним рівнянням* називається рівняння, в яке входять: незалежна зміна *x,* шукана функція *y* та її похідні або диференціали.

Символічно диференціальні рівняння записуються так:

$$F(x,y,y')=0, \quad F(x,y,y'')=0. \qquad (1)$$

Диференціальне рівняння називається *звичайним*, якщо шукана функція залежить від одного незалежного змінного.

Порядком диференціального рівняння називається порядок старшої похідної або диференціала, що входить у дане рівняння.

Наприклад, рівняння вигляду $F(x,y,y')=0$ є диференціальним рівнянням першого порядку, а рівняння вигляду $F(x,y,y',...,y^{(n)})=0$ – рівнянням *n*-го порядку.

Розв'язком або інтегралом диференціального рівняння називається така функція, яка перетворює це рівняння в тотожність.

Процес відшукання розв’язків диференціального рівняння називається розв’язуванням або інтегруванням диференціального рівняння.

Нехай функція $y = \varphi(x)$ є розв’язком рівняння

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \qquad (2)$$

Тоді напрям дотичної до кривої, що визначається функцією $y = \varphi(x)$ на площині xOy, в кожній точці збігається з напрямом поля, що визначається рівнянням (2). Крива $y = \varphi(x)$ називається інтегральною кривою рівняння (2).

2. Задача Коші.

Диференціальне рівняння має безліч розв’язків.

Загальним розв'язком або загальним інтегралом диференціального рівняння називається такий розв'язок, до якого входить стільки незалежних довільних сталих, який порядок рівняння.

Так, загальний розв'язок диференціального рівняння першого порядку має одну довільну сталу.

Частинним розв'язком диференціального рівняння називається розв'язок, знайдений із загального при різних числових значеннях довільних сталих.

Значення довільних сталих знаходять при певних початкових значеннях аргументу і функції.

Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння означає розв’язати задачу Коші.

Умова задачі Коші формулюється наприклад так: Серед усіх розв’язків рівняння $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ знайти такий, який при заданому значенні аргументу $x = x_0$ приймає задане значення $y(x_0) = y_0$. Числа x_0 і y_0 називаються початковими умовами.

3. Диференціальні рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними.

Означення. ДР виду

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \qquad (3)$$

називається ДР з *відокремленими змінними*. Загальний розв'язок ДР подається так:

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C, \tag{4}$$

а розв'язок задачі Коші з початковими умовами $x = x_0,\ y = y_0$ має вигляд

$$\int_{x_0}^{x} M(x)dx + \int_{y_0}^{y} N(y)dy = 0. \tag{5}$$

ДР з відокремленими змінними зводиться до квадратури, тобто до знаходження інтегралів.

Приклад 1. Знайдемо загальний розв'язок ДР $2xdx + 2ydy = 0.$

Розв'язання.

Інтегруючи, дістаємо інтеграл ДР $x^2 + y^2 = C.$

Інтегральними кривими є концентричні кола з центром у початку координат.

Означення. Диференціальне рівняння виду

$$N_1(y)M_1(x)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \tag{6}$$

називається ДР з *відокремлюваними змінними*, тобто рівнянням, що зводяться до ДР з відокремленими змінними.

Поділивши рівняння (6) на $N_1(y)\,M_2(x)$, дістанемо ДР з відокремленими змінними:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0. \tag{7}$$

Рівняння (7) має розв'язок $y = y_k,\ x = x_j$, де $y = y_k,\ x = x_j$ є розв'язками рівнянь $N_1(y) = 0,\ M_2(x) = 0.$

Аналогічно ДР виду

$$y' = f_1(x)f_2(y) \tag{8}$$

є ДР з відокремлюваними змінними. Рівняння (8) можна записати у вигляді:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y),\quad \frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx. \tag{9}$$

Рівняння (8) має розв'язок виду $y = y_k$, де $f_2(y_k) = 0.$

Приклад 2. Знайдемо загальний розв'язок ДР $y' = 2xy^2$.

Розв'язання.

Запишемо рівняння у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2, \quad \frac{dy}{y^2} = 2xdx, \quad \int \frac{dy}{y^2} = \int 2xdx$$

або

$$-\frac{1}{y} = x^2 + C, \quad y = -\frac{1}{x^2 + C}.$$

4. Однорідні диференціальні рівняння.

Означення. Диференціальне рівняння називається *однорідним*, якщо його можна подати у вигляді

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (10)$$

Воно за допомогою заміни змінної $\frac{y}{x} = u,\ y = ux$ зводиться до ДР з відокремлюваними змінними $u'x + u = f(u),\ x\frac{du}{dx} = f(u) - u$, а знаходження розв'язку зводиться до квадратур $\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$.

Приклад 3. Знайдемо загальний розв'язок ДР $y' = \frac{y}{x}$.

Розв'язання.

Узявши $y = ux$, дістанемо ДР і його загальний розв'язок $u'x + u = u,\ u'x = 0,\ u = C,\ y = Cx.$

Приклад 4. Знайдемо загальний розв'язок ДР $y' = \frac{y^2}{x^2}$.

Розв'язання.

Візьмемо $y = ux$ і одержимо ДР для змінної

$$u'x + u = u^2,\ x\frac{du}{dx} = u^2 - u,\ \frac{du}{u^2 - u} = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруючи ДР з відокремленими змінними, знаходимо загальний розв'язок:

$$\int \frac{du}{u^2-u} = \int \frac{dx}{x}, \quad \ln\left|\frac{u-1}{u}\right| = \ln x + \ln C, \quad \frac{u-1}{u} = Cx,$$

$$u = \frac{1}{1-Cx},$$

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{1-Cx},$$

$$y = \frac{x}{1-Cx}.$$

Однорідне ДР $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ не змінюється при перетворенні подібності:

$y = ky_1, \quad x = kx_1, \quad k = \mathrm{const}.$

ДР $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ перетворюється на ДР $\frac{dky_1}{dkx_1} = f\left(\frac{ky_1}{kx_1}\right), \ \frac{dy_1}{dx_1} = f\left(\frac{y_1}{x_1}\right).$

5. Лінійні диференціальні рівняння.

Означення. Диференціальні рівняння виду

$$y' + P(x)y' = Q(x) \tag{11}$$

називається *лінійним ДР*. Якщо $Q(x) \equiv 0$, то ДР є однорідним. Якщо $Q(x) \equiv 0$, то ДР називається *неоднорідним*.

Однорідні рівняння інтегруються у квадратурах, як ДР із відокремленими змінними:

$$y' + P(x)y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -P(x)y, \quad \frac{dy}{y} = -P(x)dx,$$

$$\int \frac{dy}{y} = -P(x)dx,$$

$$\ln|y| = -\int P(x)\,dx,$$

$$y = e^{-\int P(x)dx}.$$

Нехай відомий частинний розв’язок неоднорідного ДР.

Шукаємо загальний розв’язок неоднорідного ДР у вигляді $y = y_0(x) + z$.

Оскільки виконується тотожність $y_0'(x) + P(x)\, y_0(x) = Q(x)$, то для відшукання z маємо однорідне ДР $z' + P(x)z = 0.$

Отже, справджується така теорема:

Теорема 1. *Загальний розв'язок неоднорідного лінійного ДР дорівнює сумі частинного розв'язку неоднорідного ДР і загального розв'язку однорідного ДР.*

Приклад 5. Лінійне ДР $y' + y = x + 1$ має частинний розв'язок $y_0(x) = x$. Однорідне ДР $z' + z = 0$ має загальний розв'язок $z = Ce^{-x}$.

Загальний розв'язок неоднорідного ДР дорівнює сумі $y = x + Ce^{-x}$.

Зазвичай використовують три методи розв'язування лінійного неоднорідного ДР: метод Бернуллі, Ейлера і Лагранжа. Розглянемо метод Бернуллі.

Метод Бернуллі.

Розв'язок ДР (11) шукаємо у вигляді добутку двох функцій $y = u \cdot v$. Підставляючи, дістаємо рівняння $u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)$.

Зведемо це рівняння до системи ДР:

$$\begin{cases} uv' + P(x)uv = 0, \\ u'v = Q(x). \end{cases}$$

Із першого рівняння знаходимо змінну v:

$$v' = -P(x)v, \quad \frac{dv}{dx} = -P(x)v, \quad \frac{dv}{v} = -P(x)dx,$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int P(x)dx, \quad \ln|v| = -\int P(x)dx, \quad v = e^{-\int P(x)dx}.$$

Із другого рівняння знаходимо змінну u:

$$u' = Q(x)v^{-1}, \quad u' = Q(x)e^{\int P(x)dx}, \quad u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C.$$

Остаточно маємо розв'язок у вигляді

$$y = \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right) e^{-\int P(x)dx}. \qquad (12)$$

Приклад 6. Знайдемо загальний розв'язок ДР

$$xy' + y = x^2.$$

Розв'язання.

Розв'язок шукаємо у вигляді добутку функцій $y = u \cdot v$. Підставляючи, дістаємо рівняння

$$x(u'v + uv') + uv = x^2.$$

Зведемо це рівняння до системи ДР:

$$\begin{cases} xuv' + uv = 0, \\ xu'v = x^2. \end{cases}$$

Із першого рівняння $xv' + v = 0$ знаходимо:

$$v' = -\frac{v}{x}, \qquad \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}, \qquad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = -\ln|x|, \quad v = x^{-1}.$$

Із другого рівняння маємо:

$$xu'x^{-1} = x^2,\; u' = x^2,\; u = \int x^2 dx,\; u = \frac{x^3}{3} + c.$$

Знаходимо розв'язок:

$$y = uv,\;\; y = \left(\frac{x^3}{3} + c\right) x^{-1}.$$

Метод Лагранжа

Лагранж запропонував загальний метод розв'язування неоднорідних лінійних ДР. Спочатку розв'язується однорідне ДР. У загальний розв'язок входять довільні сталі. Потім шукається загальний розв'язок неоднорідного ДР і при цьому довільні сталі стають новими шуканими функціями.

Шукатимемо розв'язок неоднорідного ДР (11).

Спочатку розв'яжемо однорідне ДР $y' + P(x)y = 0$. Загальний розв'язок має вигляд $y = Ce^{-\int P(x)dx}$. Шукаємо розв'язок неоднорідного ДР у вигляді $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$. Підставляючи в ДР (11), дістаємо рівняння

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} + C(x)e^{-\int P(x)dx}(-P(x)) + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x).$$

Приходимо до простого ДР

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x), C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1$$

і загального розв'язку неоднорідного ДР виду:

$$y = \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1\right)e^{-\int P(x)dx}.$$

Метод Лагранжа часто називають ***методом варіації довільної сталої***.

Приклад 7. Знайдемо за методом Лагранжа розв'язок неоднорідного лінійного ДР

$$y' + xy = 1 + x^2.$$

Розв'язання.

Спочатку знайдемо загальний розв'язок однорідного ДР:

$$y' + xy = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = -xy,$$

$$\frac{dy}{y} = -xdx,$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int xdx,$$

$$\ln|y| = -\frac{x^2}{2} + \ln C,$$

$$y = Ce^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Шукаємо розв'язок неоднорідного ДР у вигляді $y = C(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$. Підставивши в неоднорідне ДР, дістанемо

$$C'_{(x)}e^{-\frac{x^2}{2}} + C_{(x)}e^{-\frac{x^2}{2}}(-x) + xC_{(x)}e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 + x^2,$$

або

$$C'_{(x)} = \left(1 + x^2\right) e^{\frac{x^2}{2}}, \quad C(x) = \int \left(1 + x^2\right) e^{\frac{x^2}{2}} dx.$$

Використаємо формулу інтегрування частинами:

$$\int e^{\frac{x^2}{2}} dx = \left| \begin{matrix} u = e^{\frac{x^2}{2}}, & du = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x \\ dv = dx, & v = x \end{matrix} \right| = xe^{\frac{x^2}{2}} - \int x^2 e^{\frac{x^2}{2}} dx.$$

Отже, остаточно дістанемо загальний розв'язок ДР:

$$C(x) = \int e^{\frac{x^2}{2}} dx + \int x^2 e^{\frac{x^2}{2}} dx = xe^{\frac{x^2}{2}} + C_1,$$

$$y(x) = \left(xe^{\frac{x^2}{2}} + C_1 \right) e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad y(x) = x + C_1 e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

До лінійного ДР зводиться ДР Бернуллі

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0, \quad n \neq 1).$$

Вводиться нова змінна $z = \frac{1}{y^{n-1}}$, і ДР для z набирає вигляду ДР

$$\frac{z'}{1-n} + P(x)z = Q(x).$$

Питання для опитування:

- Навести приклади задач, що приводять до поняття диференціальних рівнянь.
- Дати означення диференціального рівняння першого порядку.
- Що називається розв'язком диференціального рівняння?
- Дати означення загального і частинного розв'язків диференціального рівняння?
- Що таке особливий розв'язок диференціального рівняння? Який його геометричний зміст?
- Що таке задача Коші?
- Як розв'язуються диференціальні рівняння з відокремленими змінними?
- Які диференціальні рівняння називаються однорідними (неоднорідними)?
- В чому полягає метод Бернуллі?
- Що таке метод варіації сталої?