Лекція № 2.

Т е м а : В и з н а ч н и к и ,   ї х   в л а с т и в о с т і .

План:

1. **Визначники 2-го і 3-го порядків.**
2. **Властивості визначників.**
3. **Розклад визначника за елементами рядка або стовпця.**
4. **Поняття про визначники вищих порядків.**

Термін «алгебра» походить від назви твору «Альджебр аль-мукабала» узбецького математика Мухаммеда аль-Хорезмі. Цей твір містить методи розв'язування задач, що зводяться до рівнянь першого і другого степенів.

Алгебраїчна символіка була створена в основному в 16—17 ст. Першим застосував буквенні позначення як для невідомих, так і для заданих в задачі величин, французький математик Ф. Вієт.

До середини 18 ст. алгебра склалася приблизно в тому об'ємі, який нині називають елементарною алгеброю.

Однією з основних задач лінійної алгебри є розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. У зв'язку з вивченням цих систем виникли поняття визначника та матриці. Побудову загальної теорії систем лінійних рівнянь було завершено в 19 ст.

1.Визначники 2-го і 3-го порядків

Означення. Вираз

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \qquad (3.1)$$

називається *визначником (детермінантом) другого порядку*.

Означення. Вираз

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{23}a_{32}a_{11} \qquad (3.2)$$

називається *визначником (детермінантом) третього порядку*.

Поняття «визначник» (від латинського determino — визначаю) ввів В. Лейбніц.

Символи a_{ij} називаються елементами визначника, причому перший індекс i показує номер рядка, а другий індекс j — номер стовпця, на перетині яких стоїть даний елемент.

Елементи a_{11}, a_{22} у визначнику (3.1) і a_{11}, a_{22}, a_{33} у визначнику (3.2) складають головну діагональ визначника, а елементи a_{12}, a_{21} і a_{13}, a_{22} , a_{31} в тих самих визначниках — побічну діагональ.

Для обчислення визначника другого порядку потрібно від добутку елементів, що стоять на головній діагоналі, відняти добуток елементів, розміщених на побічній діагоналі. Це правило отримало назву *правила прямокутника..*

Визначник третього порядку обчислюється за правилом трикутників (*рис. 3.1*): перші три доданки в правій частині формули (3.2) є добутками елементів, що стоять на головній діагоналі і в вершинах двох трикутників, у яких одна сторона паралельна головній діагоналі. Аналогічно утворюються доданки зі знаком мінус, де за основу береться побічна діагональ.

рис. 3.1

Зауважимо, що елементами визначника можуть бути не тільки числа, а й алгебраїчні чи тригонометричні вирази, функції тощо.

<u>Приклад.</u> Обчислити визначники:

1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$=3·1-4·(-2)=3+8=11

2) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

3) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$=2·8·5+3·3·(-2)+5·0·1-(-2)·1·8-3·3·5-2·3·0=80-18+16-45=33.

2.Властивості визначників.

Розглянемо основні властивості визначників.

1°. Визначник не зміниться, якщо його рядки замінити відповідними стовпцями:

2°. Якщо переставити місцями два рядки (стовпці), то визначник поміняє знак.

3°. Якщо один з рядків (стовпців) визначника складається тільки з нулів, то визначник дорівнює нулю.

4°. Якщо визначник має два однакових рядки (стовпці), то він дорівнює нулю.

5°. Спільний множник, що міститься в усіх елементах одного рядка (стовпця), можна винести за знак визначника.

6°. Якщо у визначнику елементи двох рядків (стовпців) пропорційні, то визначник дорівнює нулю.

7°. Якщо кожен елемент n-го рядка (n-го стовпця) є сума двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі двох визначників, у одного з яких n-й рядок (n-й стовпець) складається з перших доданків, а у другого — з других; інші елементи усіх трьох визначників однакові.

8°. Визначник не зміниться, якщо до елементів одного рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те саме число.

3.Розклад визначника за елементами рядка або стовпця.

Нехай задано визначник третього порядку

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (3.3)$$

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника називається визначник, який утворюється з даного визначника в результаті викреслювання *i*-го рядка та *j*-го стовпця. Наприклад, для визначника (3.3) мінорами елементів a_{23} і a_{32} є такі визначники:

$$M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad M_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається його мінор, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто

$$A_{ij}=(-1)^{i+j} M_{ij}$$

Теорема 1. *Визначник дорівнює сумі добутків елементів якого-небудь рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення.*

Розкладемо, наприклад, визначник (3.3) за елементами першого рядка:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}.$$

Запис визначника в такій формі називають ***розкладом визначника за елементами відповідного рядка чи стовпця.***

Теорема 2. Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю.

4.Поняття про визначники вищих порядків

Теорема 1 дає змогу ввести означення визначника довільного порядку. За означенням визначник n-го порядку дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення.

Розглянемо, наприклад, визначник четвертого порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Цей визначник можна розкласти за елементами будь-якого рядка, наприклад першого:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}.$$

Оскільки всі алгебраїчні доповнення A_{ij} у формулі (6) є визначники третього порядку, то цією формулою можна користуватись для обчислення визначника четвертого порядку. Але такий спосіб обчислення громіздкий: якщо для знаходження визначника четвертого порядку треба обчислювати чотири визначники третього порядку, то для знаходження визначника п'ятого порядку вже прийдеться обчислювати двадцять визначників третього порядку! Тому на практиці спочатку за допомогою властивості 8° перетворюють визначник так, щоб у деякому рядку чи стовпці всі елементи, крім одного, стали нулями. Розкладаючи тоді визначник згідно з теоремою за елементами цього рядка, дістанемо тільки один доданок, тому що всі інші доданки є добутками алгебраїчних доповнень на нуль.

Приклад. Обчислити визначник:

3) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

Розв’язання.

У першому рядку визначника перетворимо всі елементи на нуль, крім першого за допомогою елементарних перетворень: перший і другий рядок залишимо без змін, до третього додамо перший, а до четвертого – перший помножений на (-2). Тоді:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Розклавши цей визначник за елементами першого рядка, дістанемо:

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -21.$$

Питання для опитування:

- Що називається визначником другого порядку?
- Що називається визначником третього порядку7
- Сформулюйте основні властивості визначників.
- Дайте означення мінору і алгебраїчного доповнення?
- Дайте означення визначника четвертого порядку.
- Які методи обчислення визначників ви знаєте?
- Як обчислюються визначники вищих порядків?
- Сформулюйте теорему про розклад визначника за елементами якого-небудь рядка або стовпчика