Лекція № 4.

Тема: Системи лінійних рівнянь та методи їх розв'язання.

План:

1. **Основні означення.**
2. **Метод Крамера розв'язування систем лінійних рівнянь.**
3. **Розв'язування систем лінійних рівнянь матричним методом.**
4. **Метод Гаусса.**

1.Основні означення.

Означення. *Системою m лінійних рівнянь з n невідомими* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називається система виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (3.6)$$

числа a_{ij}, (i=1,2,…m; j=1,2,…,n) біля невідомих називаються *коефіцієнтами*, а числа b_i – *вільними членами системи.*

Система рівнянь (3.6) називається *однорідною*, якщо всі вільні члени дорівнюють нулю, в іншому випадку вона називається *неоднорідною*.

Означення. *Розв'язком системи* (3.6) називається упорядкований набір n чисел $\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$, якщо при підстановці замість невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ усі рівняння системи перетворюються в тотожності.

Означення. Система рівнянь називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок, і *несумісною*, якщо вона не має жодного розв'язку.

Сумісна система називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок. Сумісна система називається *невизначеною*, якщо вона має більше ніж один розв'язок.

2.Метод Крамера розв'язування систем лінійних рівнянь.

Формули Крамера для систем n лінійних рівнянь з n невідомими мають вигляд:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x1}}{\Delta}\ ,\quad x_2 = \frac{\Delta_{x2}}{\Delta},\ \dots\ ,\quad x_n = \frac{\Delta_{xn}}{\Delta} \qquad (3.7)$$

де Δ- визначник системи, складений з коефіцієнтів системи, а $\Delta_{x1},\Delta_{x2},\dots,\Delta_{xn}$ визначники, які утворюються з визначника системи відповідно заміною стовпців при невідомих х та у вільними членами.

1. Якщо $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок.
2. Якщо $\Delta = 0$, *а* Δ_{x1}, Δ_{x2}, ..., Δ_{xn} не дорівнюють нулю, то система рівнянь розв'язку не має.
3. Якщо $\Delta=0$, $\Delta_{x1}=\Delta_{x2}=\dots=\Delta_{xn}=0$, то система має безліч розв'язків.

Примітка. Метод Крамера зручно використовувати для розв'язування систем 2,3,4 рівнянь відповідно з 2-ма, 3-ма, 4-ма невідомими, якщо визначник системи $\Delta \neq 0$.

- Якщо визначник системи $\Delta=0$, то розв'язувати систему методом Крамера не можна.
- Якщо кількість рівнянь і невідомих більше 4, то знаходити розв'язок системи рівнянь за формулами Крамера важко.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь за формулами Крамера:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2y = 1 \\ x + y - z = -2 \end{cases}$$

Розв'язання.

Знайдемо визначник системи Δ, і визначники Δ_x, Δ_y, Δ_z.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&2&0\\1&1&-1\end{vmatrix}=-2+1-2-1=-4 \qquad \Delta_x=\begin{vmatrix}0&-1&1\\1&2&0\\-2&1&-1\end{vmatrix}=1+4-1=4$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&-2&-1\end{vmatrix}=-1-2-1=-4 \qquad \Delta_z=\begin{vmatrix}1&-1&0\\1&2&1\\1&1&-2\end{vmatrix}=-4-1-2-1=-8$$

За формулами Крамера (3.7) маємо:

$$x=\Delta_x/\Delta=4/-4=-1,\ \ y=\Delta_y/\Delta=-4/-4=1,\ z=\Delta_z/\Delta=-8/-4=2.$$

Відповідь: x=-1, y=1, z=2.

3. Розв’язування систем лінійних рівнянь матричним методом.

Розв’язувати системи лінійних рівнянь можна і за допомогою оберненої матриці. Цей метод отримав назву матричного. Якщо представити систему лінійних рівнянь у матричному вигляді, зліва домножити обидві частини рівняння на обернену матрицю до коефіцієнтів системи, то розв’язок системи будемо шукати у вигляді добутку оберненої матриці на матрицю B:

$$AX=B$$
$$A^{-1}\cdot AX=A^{-1}\cdot B$$
$$X=A^{-1}\cdot B$$

Цей метод використовується тоді, коли кількість рівнянь і невідомих в системі співпадають, крім того визначник коефіцієнтів системи повинен не дорівнювати нулю.

Зауваження. Метод зручний, якщо кількість невідомих не перевищує 4.

4.Метод Гаусса.

Одним з найпоширеніших методів розв’язування систем лінійних рівнянь є *метод послідовного виключення невідомих, або метод Гауса.* Цей метод ґрунтується на елементарних перетвореннях системи рівнянь. Нехай маємо систему m лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Над системами лінійних рівнянь можна виконувати такі *елементарні перетворення:*

1) Множення деякого рівняння на відмінне від нуля число,
2) Додавання до деякого рівняння системи іншого рівняння, помноженого на деяке число,
3) Перестановку рівнянь.

Ці перетворення не порушують рівносильності системи.

За допомогою перетворення 2) можна з усіх рівнянь, крім першого вилучити x_1 (при умові, $a_{11} \neq 0$, якщо $a_{11}=0$, то на місце першого рівняння потрібно перемістити інше рівняння, в якому коефіцієнт при $x_1 \neq 0$). Далі з усіх рівнянь, крім перших двох, вилучимо x_2 і т.д. в результаті одержимо систему одного з двох видів:

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + ... + c_{1n}x_n = d_1 \\ \qquad c_{22}x_2 + ... + c_{2n}x_n = d_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad c_{mn}x_n = d_m \end{cases} \quad (3.8) \qquad \text{або} \qquad \begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + ... + c_{1n}x_n = p_1 \\ \qquad c_{22}x_2 + ... + c_{2n}x_n = p_2 \\ \qquad \dots\dots\dots\dots \\ \qquad c_{rr}x_r + ... + c_{rn}x_n = p_r \\ \qquad\qquad 0 = p_{r+1} \\ \qquad\qquad \dots \\ \qquad\qquad 0 = p_m \end{cases} \quad (3.9)$$

трикутний вигляд *східчастий(*трапецієвидний) вигляд

Система (3.8) має єдиний розв'язок і розв'язується починаючи з останнього рівняння, система (3.9) несумісна, якщо хоч одне $p_{r+1},...p_m \neq 0$, і сумісна, невизначена, т/б має безліч розв'язків, якщо $p_{r+1}=...=p_m=0$.

Зауваження1. Даний метод називається алгоритмом Гауса. Він складається з однотипних операцій і легко реалізується на сучасних ЕОМ.

Зауваження2. При розв'язуванні системи лінійних рівнянь методом Гауса зручніше приводити до трикутного чи трапецієподібного вигляду не саму систему рівнянь, а розширену матрицю цієї системи, т/б матрицю, утворену приєднанням до матриці її коефіцієнтів стовпця вільних членів. Виконуючи над рядками розширеної матриці елементарні перетворення, приходимо до розв'язку даної системи.

Теорема Кронекера-Капеллі (*про існування розв'язку системи лінійних рівнянь*). *Для того щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг її основної матриці дорівнював рангу розширеної матриці.*

Якщо ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці і дорівнює числу невідомих, то система має єдиний розв'язок.

Якщо ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці, але менший числа невідомих, то система має безліч розв'язків.

<u>Приклад.</u> Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 2 \end{cases}.$$

Розв'язання.

До другого рівняння додамо перше, помножене на (-4), до третього додамо перше, помножене на (-3), одержуємо:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ \quad -9x_2 - 18x_3 = -3 \\ \quad -3x_2 - 6x_3 = -1 \end{cases}.$$

Ділимо друге рівняння на (-3), а третє множимо на (-1), одержуємо:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ \quad 3x_2 + 6x_3 = 1 \\ \quad 3x_2 + 6x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ \quad 3x_2 + 6x_3 = 1 \end{cases}.$$

Нехай x_3- вільне невідоме, тоді

$$x_2 = \frac{1-6x_3}{3}, \quad x_1 = 1-3x_2-5x_3 = 1-1+6x_3-5x_3 = x_3.$$

Отже, загальним розв'язком розглядуваної системи є така сукупність значень невідомих:

x_3- вільне невідоме

$$x_2 = \frac{1-6x_3}{3}, \quad x_1 = x_3.$$

Якщо надати вільному невідомому деяке конкретне значення, то одержимо частинний розв'язок. Наприклад, x_3=1, тоді x_2=-5/3, x_1=1.

Отже, впорядкована трійка чисел (1, -5/3, 1) є частинним розв'язком розглядуваної системи лінійних рівнянь.

<u>Приклад.</u> Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - 1x_2 + x_3 + x_4 = 9 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 17 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 7x_4 = -4 \end{cases}$$

Розв'язання.

Випишемо розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 9 \\ 2 & -3 & 3 & 1 & 17 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & -3 & -7 & -4 \end{array}\right)$$

Поміняємо місцями перший та третій рядки матриці.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 6 \\ 2 & -3 & 3 & 1 & 17 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & -3 & -7 & -4 \end{array}\right).$$

До другого та третього рівняння додамо перше рівняння помножене на (-2), , а до четвертого - додамо перше помножене на (-1).

Отримаємо:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -6 & -10\end{array}\right)$$

Поміняємо місцями другий і третій рядки матриці.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & -6 & -10\end{array}\right)$$

До третього рядка матриці додамо другий рядок, а до четвертого – додамо другий помножений на (-2). Отримаємо:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 8 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -8 & -12 & -4\end{array}\right)$$

До четвертого рядка додамо третій.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 8 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -2\end{array}\right)$$

Поділимо третій рядок на 8, а четвертий на (-6). Отримаємо:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3\end{array}\right).$$

З останнього рівняння знаходимо невідому x_4: $x_4 = \frac{1}{3}$.

З третього рівняння знаходимо невідому x_3:

$$x_3 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}x_4 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0.$$

З другого рівняння отримаємо:

$$x_2 = -3 - 3x_4 - 3x_3 = -3 - 3 \cdot \frac{1}{3} - 3 \cdot 0 = -3 - 1 = -4.$$

З першого рівняння знаходимо:

$$x_1 = 6 + 1x_4 + 1x_3 + 1x_2 = 6 + 1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-4) = 6 + \frac{1}{3} - 4 = 2\frac{1}{3}$$

Отже, $x_1 = 2\frac{1}{3},\ x_2 = -4,\ x_3 = 0,\ x_4 = \frac{1}{3}.$

Відповідь: $x_1 = 2\frac{1}{3},\ x_2 = -4,\ x_3 = 0,\ x_4 = \frac{1}{3}.$

Питання для опитування:

- Що називається системою m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими?
- Яка система лінійних рівнянь називається сумісною (несумісною) визначеною (невизначеною)?
- В якому випадку застосовуються формули Крамера?
- Поясніть алгоритм методу Гаусса розв’язування систем лінійних рівнянь?
- Сформулюйте теорему Кронекера-Капеллі.
- За яких умов однорідна система лінійних рівнянь має єдиний нульовий розв’язок, безліч розв’язків?