Лекція № 5.

Тема: Вектори, лінійні дії з ними. Скалярний, векторний і мішаний добутки векторів.

План:

1. **Скалярні і векторні величини. Види векторів.**
2. **Координати, довжина і напрямні косинуси вектора.**
3. **Лінійні дії над векторами.**
4. **Дії над векторами в системі координат.**
5. **Поняття векторного простору. Базис і ранг системи векторів.**
6. **Скалярний добуток векторів.**
7. **Векторний добуток векторів.**
8. **Мішаний добуток векторів.**

Векторна алгебра – розділ математики, в якому вивчаються дії над векторами. Вона виникла і вдосконалювалась у зв’язку з потребами механіки і фізики. Апарат векторного числення ефективно використовується в багатьох загальнонаукових та інженерних дисциплінах (електро- і гідродинаміці, механіці, теорії механізмів і машин).

1.Скалярні і векторні величини. Види векторів.

Багато фізичних величин повністю визначаються своїм числовим значенням (об'єм, маса, густина, температура тощо); вони називаються *скалярними*. Але є й такі величини, які крім числового значення мають ще й напрям (швидкість, сила, напруженість магнітного поля тощо). Такі величини називаються *векторними*.

Вектор – *це напрямлений відрізок.* Позначають вектори однією маленькою латинською літерою (наприклад $\bar{a}$), або двома великими (наприклад $\overline{AB}$), над літерами ставлять стрілку або рисочку. Точку A називають початком вектора, а точку B – кінцем вектора.

$$A \xrightarrow{\quad \bar{a} \quad} B$$

рис. 1.

Вперше вектори застосував К.Вексель у 1799р. для інтерпретації комплексних чисел. Термін "*вектор*" (від лат. *Vector*- переносник) ввів у 1848р. Гамільтон.

Види векторів.

Означення. Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається ***одиничним***. Одиничний вектор, напрям якого збігається з напрямом вектора $\bar{a}$, називається ***ортом вектора*** $\bar{a}$ і позначається $\bar{a}^0$.

Означення. Вектор, початок якого збігається з кінцем, називається ***нульовим*** і позначається через $\bar{0}$; напрям нульового вектора невизначений, а його довжина дорівнює нулю.

Означення. Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається ***колінеарними***, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Колінеарні вектори можуть бути напрямлені однаково або протилежно. Нульовий вектор вважається колінеарним будь-якому вектору.

Означення. Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називаються ***рівними***, якщо вони колінеарні, однаково напрямлені і мають рівні довжини.

Означення. Три вектори називаються ***компланарними***, якщо вони лежать в одній площині або в паралельних площинах. Зокрема, вектори компланарні, якщо два з них або всі три колінеарні, або хоча б один з трьох векторів нульовий.

2.Координати, довжина і напрямні косинуси вектора.

Для того щоб операції над векторами звести до операцій над числами, розглядатимемо вектори в системі координат.

Нехай в прямокутній системі координат *Oxyz* задано вектор $\vec{a}$. Це означає, що в ортонормованому базисі $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, який задає обрану систему координат, вектор $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, де числа a_x, a_y, a_z— координати вектора $\vec{a}$ в цьому базисі. З властивостей проекції випливає, що

$$a_x = \text{пр}_{0x}\vec{a},\quad a_y = \text{пр}_{0y}\vec{a},\quad a_z = \text{пр}_{0z}\vec{a}. \qquad (1)$$

Отже, координати вектора в системі координат *Oxyz* це його проекції на осі координат.

Нехай початок вектора міститься в точці $A(x_1, x_2, x_3)$, а кінець в точці $B(y_1, y_2, y_3)$. Щоб знайти координати вектора $\overrightarrow{AB}$ потрібно від координат точки В відняти відповідні координати точки А, т/б

$$\overrightarrow{AB} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3). \qquad (2)$$

Означення. Відстань між початком вектора $\vec{a} = AB$ і його кінцем називається довжиною (або модулем) вектора і позначається $|\overline{a}|$ або $|AB|$.

Довжина вектора, заданого своїми координатами знаходиться за формулою:

$$|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \qquad (3)$$

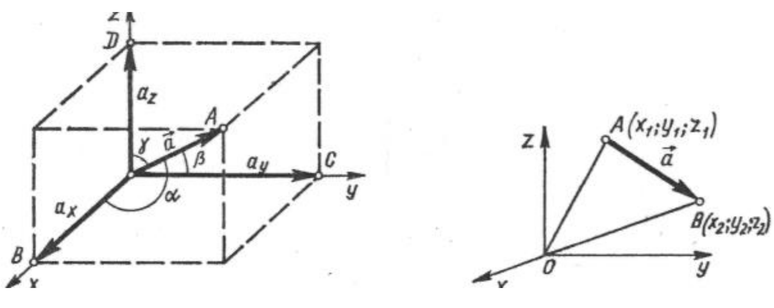


рис. 2.

Напрям довільного вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ визначається кутами α, β, γ які утворює вектор а з осями координат (*рис. 2*):

$$\alpha = (\vec{a}, \vec{i}),\ \beta = (\vec{a}, \vec{j}),\ \gamma = (\vec{a}, \vec{k}),\quad 0 \le \alpha, \beta, \gamma \le \pi.$$

Косинуси цих кутів називаються напрямними косинусами. Формули для напрямних косинусів мають вигляд:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|},\quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|},\quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}. \qquad (4)$$

Сума квадратів напрямних косинусів довільного вектора дорівнює одиниці, тобто

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

<u>Приклад.</u> Задано точки А (0; -1; 2) і В (-1; 1; 4). Знайти координати, довжину та напрямні косинуси вектора АВ.

Розв'язання.

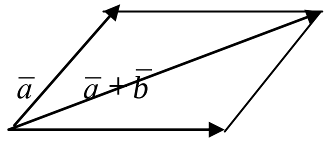
З формул (4.2), (4.3) і (4.4) маємо АВ = (-1; 2; 2); |AB| =√1 + 4+4 =3;

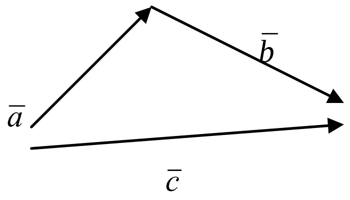
$$\cos\alpha = \frac{-1}{3},\ \cos\beta = \frac{2}{3},\ \cos\gamma = \frac{2}{3}.$$

3. Лінійні дії над векторами.

До лінійних дій над векторами належать додавання і віднімання векторів, множення вектора на число.

1. **Додавання векторів.**

 $\bar{b}$ *рис.3.*	***Сумою двох векторів*** $\bar{a}$ ***і*** $\bar{b}$ називається вектор $\bar{c}$, який виходить з їхнього спільного початку і є діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$: $\bar{a} + \bar{b} = \bar{c}$ (правило паралелограма)

 *рис. 4.*	***Сумою векторів*** $\bar{a}$ ***і*** $\bar{b}$ називається вектор $\bar{c}$, напрямлений з початку вектора $\bar{a}$ в кінець вектора $\bar{b}$ за умови, що початок вектора $\bar{b}$ збігається з кінцем вектора $\bar{a}$. (правило трикутника).

2. Віднімання векторів.

Віднімання векторів визначається як дія, обернена додаванню.

Означення. Різницею двох векторів $\bar{a}$ ***і*** $\bar{b}$ називається такий вектор $\bar{c}$, який треба додати до вектора $\bar{b}$, щоб одержати вектор $\bar{a}$.

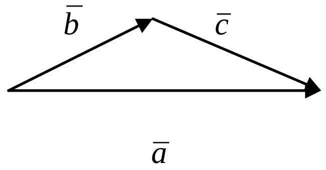


рис. 5.

Означення. Два вектори називаються ***протилежними***, якщо вони колінеарні, довжини їх однакові, а напрями протилежні. Вектор, протилежний вектору $\bar{a}$, позначається через $-\bar{a}$. Тоді

$$\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b}).$$

3. Множення вектора на число.

Добутком вектора $\bar{a}$ на число λ є вектор $\bar{b} = \lambda\bar{a}$, колінеарний вектору $\bar{a}$, з модулем $\left|\bar{b}\right| = |\lambda||\bar{a}|$ і напрямом, який співпадає з напрямом $\bar{a}$ при $\lambda > 0$ і протилежний напряму $\bar{a}$ при $\lambda < 0$.

Лінійні операції над векторами мають такі властивості:

$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ - комутативність додавання векторів.

$(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ - асоціативність додавання.

$\lambda(\mu\bar{a}) = (\lambda\mu)\bar{a}$ - асоціативність відносно множення чисел.

$\lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b}$ - дистрибутивність відносно додавання векторів.

$(\lambda + \mu)\bar{a} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{a}$ - дистрибутивність відносно додавання чисел.

4. Дії над векторами в системі координат.

Якщо відомі координати векторів, то лінійним діям з векторами відповідають відповідні арифметичні дії над їхніми координатами.

Нехай задано вектори $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$ і дійсне число λ, тоді $\lambda\vec{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$, $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z)$.

Якщо вектори $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ та $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$ рівні, тобто мають однакові довжини і напрям, то їхні координати рівні

$$a_x=b_x,\quad a_y=b_y,\quad a_z=b_z.$$

і навпаки, якщо координати векторів рівні, то $\bar{a}=\vec{b}$.

Необхідною і достатньою умовою того, що вектори $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ та $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$ колінеарні, є пропорціональність їхніх проекцій:

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}=\lambda.$$

5. Поняття векторного простору. Базис і ранг системи векторів.

Ми з'ясували, що кожному вектору на прямій співставляється дійсне число, кожному вектору, що належить деякій площині – упорядкована пара чисел (координати вектора), кожному вектору простору – упорядкована трійка чисел, і навпаки.

Дійсне число на прямій називається *одновимірним вектором*, а множину всіх одновимірних векторів називається *одновимірним простором* і позначають через R_1. Упорядковані пари чисел називається *двовимірними векторами*, а упорядковані трійки чисел – *тривимірними векторами*. Множини двовимірних і тривимірних векторів називають відповідно *двовимірними і тривимірними просторами* і позначають через R_2 і R_3.

Узагальнюючи простори R_1, R_2 і R_3, приходимо до n-вимірного простору R_n , де n- довільне натуральне число.

Означення. Упорядкована множина n дійсних чисел x_1, x_2, ..., x_n називається ***n-вимірним вектором*** $\bar{x}$ і позначається $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Множина всіх n-вимірних векторів називається ***n-вимірним простором*** і позначається через R_n. n-вимірний простір можна тлумачити

також як множину впорядкованих сукупностей n дійсних чисел.

Числа x_i (i=1,2,..., n) називаються ***компонентами вектора*** $\bar{x}$, а число n – *розміром*.

Вектори $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ і $\bar{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ вважаються рівними якщо рівні їх відповідні компоненти, т/б $x_i = y_i$ (i=1,2,...,n).

Сумою векторів $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ і $\bar{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ називається вектор

$$\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n).$$

Вектор, усі компоненти якого нулі називається *нуль-вектором*. O(0,0,...,0).

Протилежним вектору $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ називається вектор

$$-\bar{x} = (-x_1, -x_2, ..., -x_n).$$

Різницею векторів $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ і $\bar{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ називається вектор

$$\bar{x} - \bar{y} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, ..., x_n - y_n).$$

Добутком вектора на число k називається вектор $k\bar{x} = (kx_1, kx_2, ..., kx_n)$.

Властивості векторного простору.

1. $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$
2. $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$
3. $\bar{x} + \bar{0} = \bar{x}$
4. $\bar{x} + (-\bar{x}) = 0$
5. $k(l\bar{x}) = (kl)\bar{x}$
6. $k(\bar{x} + \bar{y}) = k\bar{x} + k\bar{y}$
7. $(k + l)\bar{x} = k\bar{x} + l\bar{x}$
8. $0\bar{x} = \bar{x}0 = 0$

Базис і ранг системи векторів.

Означення. Всяка упорядкована сукупність лінійно незалежних векторів, через які лінійно виражається довільний вектор простору, називається **базисом** цього простору.

Базисом на прямій називається довільний ненульовий вектор на цій прямій.

Базисом на площині називається довільна упорядкована пара не колінеарних векторів, а ***базисом у просторі*** – довільна упорядкована трійка не компланарних векторів.

Означення. Вектори, що складають базис, називаються **базисними.**

Розкласти вектор за базисом означає зобразити його у вигляді лінійної комбінації базисних векторів.

Якщо вектори $\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}$ складають базис і вектор $\bar{d}$ розкладений за цим базисом, т/б $\bar{d}=\alpha\bar{a}+\beta\bar{b}+\gamma\bar{c}$, то числа $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ називаються ***координатами вектора*** $\bar{d}$ в даному базисі, а вектори $\alpha\bar{a},\ \beta\bar{b},\ \gamma\bar{c}$ - ***складовими вектора*** $\bar{d}$. Кажуть також, що вектор $\bar{d}$ є лінійною комбінацією векторів $\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}$.

Розглянемо n-вимірний векторний простір , базисом якого буде будь-яка система з n- лінійно незалежних векторів цього простору.

Щоб дізнатися, чи система векторів $\bar{x}_1=(x_{11},x_{12},...,x_{1n}), \bar{x}_2=(x_{21},x_{22},...,x_{2n})$, ..., $\bar{x}_n=(x_{n1},x_{n2},...,x_{nn})$ утворює базис в n-вимірному векторному просторі, треба знайти визначник матриці, складеної із компонент векторів.

$$\Delta=\begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

Якщо $\Delta\neq 0$, то система векторів лінійно незалежна і утворює базис в n-вимірному векторному просторі. Якщо $\Delta=0$, то система лінійно залежна.

Теорема. Будь-який вектор n-вимірного векторного простору можна єдиним чином зобразити у вигляді лінійної комбінації векторів базису цього простору.

Кожен вектор , паралельний якій-небудь прямій, можна розкласти за базисом на цій прямій. Це означає, що для довільного вектора $\bar{d}$, колінеарного ненульовому вектору $\bar{a}$ знайдеться таке число α, що $\bar{d} = \alpha\bar{a}$.

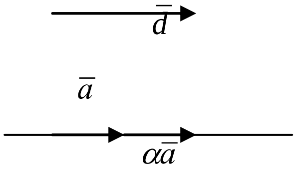


рис. 6.

Кожен вектор, паралельний якій-небудь площині , можна розкласти за вектором а цій площині. Це означає, що для довільного вектора $\bar{d}$, компланарного з двома не колінеарними векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$ знайдуться такі числа α і β, що $\bar{d} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b}$.

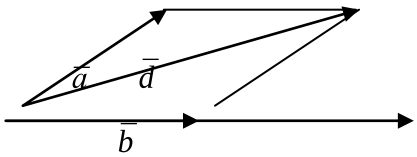


рис. 7.

Кожен вектор можна розкласти у просторі. Це означає, що для довільного вектора $\bar{d}$ і некомпланарних векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ знайдуться такі числа α , β і γ, що $\bar{d} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c}$.

Щоб знайти розклад вектора $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ через вектори базису $\bar{x}_1 = (x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n}), \bar{x}_2 = (x_{21}, x_{22}, ..., x_{2n})$, ..., $\bar{x}_n = (x_{n1}, x_{n2}, ..., x_{nn})$ треба знайти значення коефіцієнтів $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ із векторної рівності $\lambda_1\bar{x}_1 + \lambda_2\bar{x}_2 + ... + \lambda_n\bar{x}_n = \bar{x}$.

Ця векторна рівність еквівалентна системі n лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} x_{11}\lambda_1 + x_{21}\lambda_2 + ... + x_{k1}\lambda_n = x_1 \\ x_{12}\lambda_1 + x_{22}\lambda_2 + ... + x_{k2}\lambda_n = x_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{1n}\lambda_1 + x_{2n}\lambda_2 + ... + x_{kn}\lambda_n = x_n \end{cases}.$$

Така система завжди має єдиний розв'язок , так як її головний визначник, складений із компонент лінійно незалежних векторів базису, відмінний від нуля.

<u>Приклад.</u> Знайти розклад вектора $\bar{x}=(3,6,5)$ через вектори базису $\bar{x}_1=(1,2,3)$, $\bar{x}_2=(3,2,1)$, $\bar{x}_3=(1,0,1)$.

Розв'язання.

Запишемо рівняння для знаходження коефіцієнтів розкладу вектора $\bar{x}$ через вектори базису $\lambda_1\bar{x}_1+\lambda_2\bar{x}_2+\lambda_3\bar{x}_3=\bar{x}$.

Це рівняння еквівалентне системі рівнянь $\begin{cases}\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3=3\\ 2\lambda_1+2\lambda_2=6\\ 3\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=5\end{cases}$.

Розв'язуючи її, одержуємо $\lambda_1=2,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=-2$.

Отже, $\bar{x}=2\bar{x}_1+\bar{x}_2-2\bar{x}_3$.

6. Скалярний добуток векторів.

Означення, геометричний та механічний зміст скалярного добутку

Означення. Скалярним добутком двох, векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число $\vec{a}\cdot\vec{b}$, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi \qquad (5)$$

де φ - кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Якщо хоча б один з векторів $\vec{a}$ чи $\vec{b}$ нульовий, то за означенням $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Геометричний зміст скалярного добутку:

Скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку довжини одного вектора на проекцію на нього другого вектора:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|np_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|np_{\vec{b}}\vec{a}. \qquad (6)$$

Фізичний зміст скалярного добутку:

Робота дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор переміщення:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{S} = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{S}\right| \cdot \cos\alpha . \qquad (7)$$

(α-кут між вектором переміщення $\vec{S}$ і вектором сили $\vec{F}$.

Властивості скалярного добутку.

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ - комутативність множення

2. $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$ - асоціативність відносно множення на число λ

3. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ - дистрибутивність відносно додавання векторів.

Ці три властивості обумовлюють глибоку аналогію між векторною алгеброю і алгеброю чисел. Перша властивість дає змогу міняти місцями множники, друга - об'єднувати числові коефіцієнти векторних множників, а третя - розкривати або вводити дужки і виносити за них спільні скалярні чи векторні множники. Проте аналогія між скалярним добутком векторів і добутком чисел є неповною. Зокрема, не існує скалярного добутку трьох і більшого числа векторів; рівність $\vec{a} \cdot \vec{b}$=0 може виконуватись і при ненульових множниках $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$, якщо вектори $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ перпендикулярні.

Наведемо геометричні властивості скалярного добутку.

4. Якщо $\vec{a} \neq 0$ *і* $\vec{b} \neq 0$, то $\vec{a} \cdot \vec{b}$>0, коли кут між векторами $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ - гострий, і $\vec{a} \cdot \vec{b}$<0, коли кут між векторами $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ - тупий.

5. Скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли ці вектори взаємно перпендикулярні.

6. Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини

$$\vec{a}^{\,2} = \left|\vec{a}\right|^2$$

Скалярний добуток двох векторів, заданих координатами в прямокутній системі координат, дорівнює сумі добутків їхніх відповідних координат

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z .$$

Кут між двома векторами.

Із формули $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$ випливає, що

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}, \qquad (8)$$

або в координатній формі

$$\cos\varphi=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}, \qquad (9)$$

тобто *косинус кута між векторами дорівнює їхньому скалярному добутку, поділеному на добуток їхніх довжин.*

Приклад. Знайти довжину вектора $\vec{c}=2\vec{a}-3\vec{в}$, якщо $|\vec{a}|=1; |\vec{в}|=4; (\bar{a},\ \bar{b})=\frac{\pi}{3}$

Розв'язання:

Оскільки $|\vec{c}|=\sqrt{\vec{c}^{\,2}}$ то

$$|\vec{c}|=\sqrt{(2\vec{a}-3\vec{в})^2}=\sqrt{4\vec{a}^2-12\vec{a}\cdot\vec{в}+9\vec{в}^2}=\sqrt{4|\vec{a}|^2-12|\vec{a}|\cdot|\vec{в}|\cdot\cos(\bar{a},\bar{b})+9|\vec{в}|^2}=$$

$$=\sqrt{4\cdot1^2-12\cdot1\cdot4\cdot\cos\frac{\pi}{3}+9\cdot4^2}=\sqrt{4-24+144}=\sqrt{124}=2\sqrt{31}$$

Відповідь: $2\sqrt{31}$.

Приклад. Задані вектори $\vec{a}$ = (4; 0; -4); $\vec{в}$ = (-4; 2; 4;). Знайти проекцію вектора $\vec{c}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{в}$ на вектор $\vec{в}$.

Розв'язання:

Знайдемо координати вектора $\vec{c}$

$\vec{c}$ = (4; 0; -4) +1/2 (-4; 2; 4) = (4; 0; -4) + (-2; 1; 2) = (2; 1; -2).

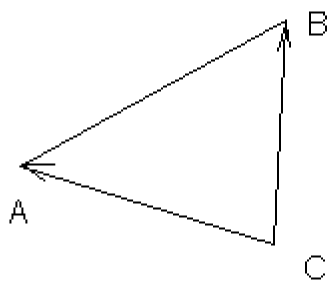
Знайдемо проекцію вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{в}$.

$$пр_{\vec{в}}\vec{c}=\frac{\vec{в}\cdot\vec{c}}{|\vec{в}|}=\frac{-4\cdot2+1\cdot2+4\cdot(-2)}{\sqrt{16+4+16}}=\frac{-8+2-8}{\sqrt{36}}=\frac{-14}{6}=-\frac{7}{3}.$$

Відповідь: $-\frac{7}{3}$

<u>Приклад.</u> Знайти кут C трикутника ABC, вершини якого задані координатами A(-1,2,1), B(2,4,-3), C(-2,5,1).

Розв'язання.



З рисунка видно, що кут C утворений векторами $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{CB}$.

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{CB}$.

$\overrightarrow{CA}$=(-1+2,2-5,1-1)=(1,-3,0),

$\overrightarrow{CB}$=(2+2,4-5,-3-1)=(4,-1,-4).

Косинус кута C знаходиться за формулою:

$$\cos\angle C=\frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CB}\right|}=\frac{1\cdot4+(-3)\cdot(-1)+0\cdot(-4)}{\sqrt{1^2+(-3)^2+0}\cdot\sqrt{4^2+\left(-1^2\right)+(-4)^2}}=\frac{7}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{33}}=\frac{7}{\sqrt{330}}\approx$$

≈0,3855

Знаходимо за таблицями кут C≈67º27'.

7. Векторний добуток векторів.

Означення і властивості векторного добутку

Означення. Векторним добутком вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який визначається такими трьома умовами:

1) довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює

$$|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi, \qquad (10)$$

де φ- кут між векторами $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;

3) якщо $\vec{c}\neq0$, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів.

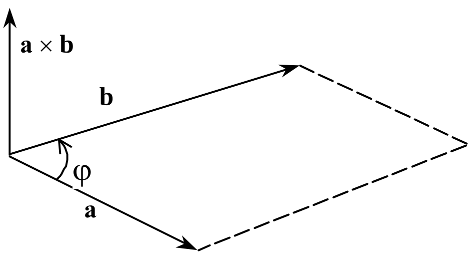


рис. 8.

Векторний добуток позначають одним із символів:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \left[\vec{a}\vec{b}\right] = \left[\vec{a} \times \vec{b}\right]$$

Властивості векторного добутку.

Розглянемо алгебраїчні властивості векторного добутку.

1°. Антикомутативність множення:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

тобто від перестановки множників векторний добуток змінює знак.

Це випливає з того, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{b} \times \vec{a}$ мають однакові модулі, колінеарні і трійки векторів ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$) і ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{a}$) протилежної орієнтації (рис. 9.)

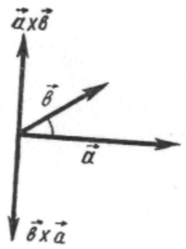


рис. 9.

2°. Асоціативність відносно скалярного множника λ:

$$\lambda \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \lambda \vec{b} = \lambda \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$$

3°. Дистрибутивність відносно додавання векторів:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}\,.$$

Алгебраїчні властивості векторного добутку дають змогу при множенні лінійних векторів виконувати дії так само, як з алгебраїчними многочленами. Проте при виконанні векторного множення слід пам'ятати, що воно некомутативне: при переставлянні співмножників знак векторного добутку змінюється на протилежний.

Наведемо *геометричні властивості векторного добутку*.

4°. Векторний добуток двох векторів дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли ці вектори колінеарні.

5°. Модуль $|\vec{a}\times\vec{b}|$ векторного добутку неколінеарних векторів дорівнює площі S паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, віднесених до спільного початку, тобто

$$S=|\vec{a}\times\vec{b}| \qquad (11)$$

6°. Векторні добутки ортів задовольняють такі рівності:

$$\begin{aligned} &\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0 \\ &\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j} \end{aligned} \qquad (12)$$

Якщо в прямокутній системі координат вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задані координатами, т/б $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, то векторний добуток вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ визначається за формулою

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\vec{k} \qquad (13)$$

Площа трикутника.

Площа трикутника, побудованого на двох векторах $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ і $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, що виходять з однієї точки (вершини трикутника), визначається за формулою

$$S=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|. \qquad (14)$$

Приклад. Знайти площу трикутника, заданого вершинами A (1; 2; 0), B (0;-2; 1), C (-1; 0; 2).

Розв'язання:

Площа трикутника АВС дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$. Оскільки $\overline{AB}$ = (-1; -4; 1),

$\overline{AC}$ = (-2; -2 ;2) .

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -4 & 1\\ -2 & -2 & 2\end{vmatrix}=-6\vec{i}-6\vec{k},$$

за формулою $S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$, площа $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|AB\times AC\right|=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+6^2}=3\sqrt{2}.$

Відповідь: $3\sqrt{2}.$

8. Мішаний добуток векторів.

Означення. **Мішаним добутком** векторів **a**, **b**, **c** називається число

$$(\bar{\mathbf{a}},\ \bar{\mathbf{b}},\ \bar{\mathbf{c}})=(\bar{\mathbf{a}}\times\bar{\mathbf{b}})\cdot\bar{\mathbf{c}}. \qquad (15)$$

Мішаний добуток за модулем дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

♦ Справді, позначимо $\bar{\mathbf{d}}=\bar{\mathbf{a}}\times\bar{\mathbf{b}}$.

Вектор $\bar{d}$ перпендикулярний до основи паралелепіпеда, а довжина його $|\bar{\mathbf{d}}|$ дорівнює площі S паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$ як на сторонах (*рис. 10.*).

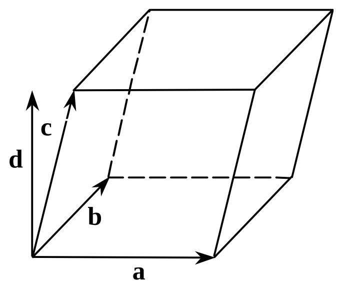


рис. 10.

Висота h паралелепіпеда дорівнює $\textit{пр}_{\bar{d}}\,\bar{\mathbf{c}}$. Отже, об'єм його обчислюємо так:

$$V = S\cdot h = \bar{\mathbf{d}}\, np_{\bar{\mathbf{d}}}\bar{\mathbf{c}} = \bar{\mathbf{d}}\cdot\ \bar{\mathbf{c}} = (\bar{\mathbf{a}}\times\bar{\mathbf{b}})\cdot\bar{\mathbf{c}} = (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}).$$

Оскільки вектор $\bar{d}$ може бути напрямлений у протилежний бік, то $V = \left|(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}})\right|$. (4.16)

Якщо відомі проекції векторів $\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}$ та $\bar{\mathbf{c}}$:

$$\bar{\mathbf{a}} = \{a_x, a_y, a_z\},\ \bar{\mathbf{b}} = \{b_x, b_y, b_z\},\ \bar{\mathbf{c}} = \{c_x, c_y, c_z\},$$

то мішаний добуток цих векторів подається визначником:

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (17)$$

Звідси маємо:

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = -(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{c}}, \bar{\mathbf{b}}) = (\bar{\mathbf{c}}, \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = -(\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{c}}) = (\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}, \bar{\mathbf{a}}) = -(\bar{\mathbf{c}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}}).$$

Приклад. Знайдемо об’єм V тетраедра з вершинами $A(1,2,3)$, $B(4, 4, 4)$, $C(2, 6, 4)$, $D(2, 3, 6)$.

Розв’язання.

Розглянемо вектори

$$\bar{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{AB}} = \{3,2,1\},\ \bar{\mathbf{b}} = \overline{\mathbf{AC}} = \{1,4,1\},\ \bar{\mathbf{c}} = \overline{\mathbf{AD}} = \{1,1,3\}$$

і запишемо їх мішаний добуток:

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 26.$$

Шуканий об’єм тетраедра $ABCD$ становить $\frac{1}{6}$ від об’єму паралелепіпеда, побудованого на векторах **a**, **b**, **c**. Отже,

$$V = \frac{1}{6}\left|(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}})\right| = \frac{26}{6}.$$

Питання для опитування:

- Що називається вектором?
- Які види векторів ви знаєте?
- Що називається ортом, нульовим вектором?
- Які вектори називаються рівними, колінеарними, компланарними?
- Які лінійні дії можна виконувати над векторами?
- Як визначаються координати і довжина вектора?
- Що називається напрямними косинусами вектора? Як вони знаходяться?
- Як визначаються лінійні дії з векторами, заданими своїми координатами?
- Що називається проекцією вектора на вісь?
- Дайте означення n-вимірного векторного простору.
- Які властивості має векторний простір?
- Дайте означення базису системи векторів.
- Сформулюйте теорему про розклад вектора за базисом.
- Що називається скалярним добутком векторів?
- Які властивості скалярного добутку ви знаєте?
- В чому полягає геометричний та механічний зміст скалярного добутку векторів?
- Сформулюйте умову перпендикулярності векторів.
- Як знайти кут між двома векторами?

- Що називається векторним добутком векторів?
- Сформулюйте властивості векторного добутку векторів.
- Як знайти площу трикутника, за допомогою векторного добутку векторів?
- Що називається мішаним добутком векторів?
- В чому полягає геометричний зміст мішаного добутку?