Лекція № 6.

Тема: Рівняння лінії на площині. Криві другого порядку.

План:

1. **Лінія на площині.**
2. **Пряма на площині. Різні види рівнянь прямої на площині.**
3. **Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих. Перетин двох прямих.**
4. **Відстань від точки до прямої. Кут між двома прямими.**
5. **Поняття ліній другого порядку.**
6. **Коло.**
7. **Еліпс, його властивості і графік.**
8. **Гіпербола, її властивості і графік.**
9. **Парабола, її властивості і графік**

Аналітична геометрія – це розділ математики, в якому властивості геометричних об’єктів (точок, ліній, поверхонь, фігур, тіл тощо) вивчаються засобами алгебри на основі методу координат і векторної алгебри.

Основоположником аналітичної геометрії вважають Р.Декарта, який вперше в 1637р. у своїй книзі “Геометрія” дав чіткий виклад ідеї методу координат на площині.

1. Лінія на площині.

Розглянемо рівність

$$F(x, y) = 0, \qquad (1)$$

яка зв'язує величини x та y.

Рівність (1) називають *рівнянням з двома змінними* x і y, якщо ця рівність виконується не для всіх пар чисел x, y, і тотожністю, якщо вона справедлива для всіх значень x і y.

Рівняння (1) називається *рівнянням лінії* l, яка задана на площині відносно певної системи координат, якщо це рівняння задовольняють координати x і y кожної точки лінії l і не задовольняють координати x і y жодної точки, яка не лежить на цій лінії.

Коли рівняння (1) є рівнянням лінії l, то кажуть, що це рівняння визначає або задає лінію l. Отже, якщо лінія задана рівнянням, то про кожну точку площини можна сказати, чи лежить вона на цій лінії, чи не лежить. Якщо координати точки задовольняють рівняння лінії, то точка лежить на ній, якщо не задовольняють, то не лежить.

Лінія, яка задана рівнянням (1) відносно певної системи координат у площині, є геометричним місцем точок, координати яких задовольняють задане рівняння.

Змінні x і y в рівнянні (1) лінії l називаються *змінними координатами її точок.*

Лінію на площині можна задати геометрично як сукупність точок з певними геометричними властивостями і аналітично – за допомогою рівняння. У зв'язку з цим виникають дві типові для аналітичної геометрії задачі: скласти рівняння лінії, яка задана геометрично, і навпаки, встановити геометричний образ лінії, заданої аналітично. Зазначимо, що в аналітичній геометрії друга задача розв'язується лише для ліній першого і другого порядків.

2. Пряма на площині. Різні види рівнянь прямої на площині.

Пряма на площині є лінією першого порядку і може бути задана різними способами.

Загальне рівняння прямої. Рівняння першого ступеня відносно змінних *x* і *y*, тобто рівняння вигляду $Ax+By+C=0$ (1) за умови, що коефіцієнти *A* і *B* одночасно не дорівнюють нулю, називається *загальним рівнянням прямої.*

Векторне рівняння – це рівняння прямої, яка проходить через задану точку $M(x_0,y_0)$ паралельно вектору $q(m,n)$ і має вигляд: $r=r_0+t\,q$. *(1)*

Тут r- радіус - вектор будь-якої точки $M(x,y)$ прямої, r_0 – радіус-вектор точки $M(x_0,y_0)$, *t*- параметр, що набуває дійсних значень. Вектор *q* – називається напрямним вектором, а його координати напрямними коефіцієнтами прямої.

Параметричне рівняння прямої: якщо в рівнянні (1) перейти до координат векторів, то дістанемо параметричні рівняння прямої:

$$x=x_0+mt$$

$$y=y_0+nt \qquad (2)$$

Канонічне рівняння прямої: якщо з рівнянь (2) вилучити параметр t, то отримаємо канонічне рівняння прямої:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n} \qquad (3)$$

Рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1(x_1,y_1)$ *і* $M_2(x_2,y_2)$*має вигляд*:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (4)$$

***Рівняння прямої у відрізках на осях* має вигляд:**

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (5),$$

де *a* і *b* – відповідно абсциса і ордината точок перетину прямої з осями O*x* і O*y*.

***Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом* має вигляд:**

$$y=kx+b \qquad (6),$$

де $k=tg\alpha$ – кутовий коефіцієнт, який дорівнює тангенсу кута нахилу прямої до додатного напрямку осі Оx, b – ордината точки перетину прямої з віссю Oy.

Рівняння прямої, яка проходить через задану точку* M(x_0,y_0) *із заданим кутовим коефіцієнтом, має вигляд:

$$y-y_0=k(x-x_0) \qquad (7),$$

де $k=tg\alpha$ – кутовий коефіцієнт прямої.

Рівняння прямої, яка проходить через задану точку* M(x_0,y_0) із заданим нормальним вектором *n(A;B), має вигляд:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \quad (8)$$

3. Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих.

Перетин двох прямих.

Щоб знайти точку перетину двох прямих, заданих рівняннями $A_1x+B_1y+C=0$ і $A_2x+B_2y+C=0$, потрібно розв’язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C=0 \\ A_2x+B_2y+C=0 \end{cases}$$

Умова паралельності 2-х прямих

Умова паралельності 2-х прямих, заданих загальними рівняннями $A_1x+B_1y+C=0$ і $A_2x+B_2y+C=0$, має вигляд:

$$A_1/A_2=B_1/B_2.$$

Умова паралельності 2-х прямих, заданих рівняннями з кутовими коефіцієнтами $y=k_1x+b_1$ *і* $y=k_2x+b_2$, має вигляд:

$$k_1=k_2.$$

Умова перпендикулярності 2-х прямих

Умова перпендикулярності 2-х прямих, заданих загальними рівняннями $A_1x+B_1y+C=0$ і $A_2x+B_2y+C=0$, має вигляд:

$$A_1A_2+B_1B_2=0$$

Умова перпендикулярності 2-х прямих, заданих рівняннями з кутовими коефіцієнтами $y=k_1x+b_1$ *і* $y=k_2x+b_2$, має вигляд:

$$k_1k_2=-1.$$

4.Відстань від точки до прямої. Кут між двома прямими.

Відстань від точки до прямої.

Відстань d від точки (x_0,y_0) до прямої, яка задана загальним рівнянням $Ax+By+C=0$ знаходиться за формулою:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Кут між двома прямими.

Кут α між двома прямими, заданих загальними рівняннями $A_1x+B_1y+C=0$ і $A_2x+B_2y+C=0$, обчислюється за формулою:

$$\cos\alpha=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

Кут α між двома прямими, заданих рівняннями з кутовими коефіцієнтами $y=k_1x+b_1$ *і* $y=k_2x+b_2$,. визначається за формулою:

$$tg\alpha=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}.$$

5. Поняття ліній другого порядку

Означення. Рівняння $F(x, y)=0$ називається *рівнянням деякої лінії в заданій системі координат*, якщо це рівняння задовольняють координати (x, y) будь-якої точки, що лежить на цій лінії, і не задовольняють координати жодної точки, що не лежить на цій лінії.

Розглянемо тепер лінії другого порядку, які на площині в загальному випадку можна записати так:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0. \qquad (1)$$

Рівняння (1) описує всі криві другого порядку в загальному випадку. Спинимось спочатку на простіших, так званих канонічних рівняннях ліній другого порядку.

6. Коло.

До кривих другого порядку належить і добре відома лінія, яка називається *колом* (*рис. 1*).

Означення. Множина точок, що містяться на однаковій відстані від заданої точки — центра, називається *колом*. За означенням $OM = R$ або $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R$.

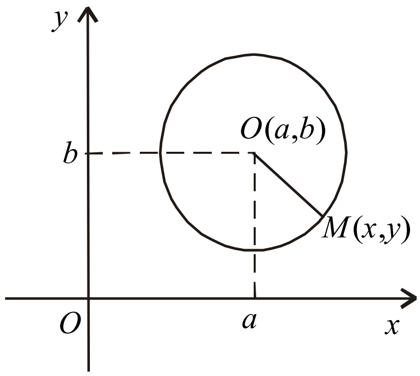

рис. 1

Піднісши обидві частини рівняння до квадрата, дістанемо:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \quad (2)$$

— канонічне рівняння кола. Тут (a, b) — координати центра кола, R — його радіус. Розкривши дужки в лівій частині (2), дістанемо, очевидно, рівняння другого степеня, тобто коло — також крива другого порядку.

7. Еліпс, його властивості і графік.

Означення. Множина точок площини, для яких сума відстаней від двох заданих точок, що називаються *фокусами*, є величина стала й така, що дорівнює $2a$ і більша, ніж відстань між фокусами, називається *еліпсом*.

На рис. 2 зображено F_1 $(-c,\ 0)$, F_2 $(c,\ 0)$ — фокуси еліпса, M $(x,\ y)$ — точка множини, яка задовольняє означення, тобто $|MF_1| + |MF_2| = 2a$, причому $2c < < 2a \Rightarrow a > c$.

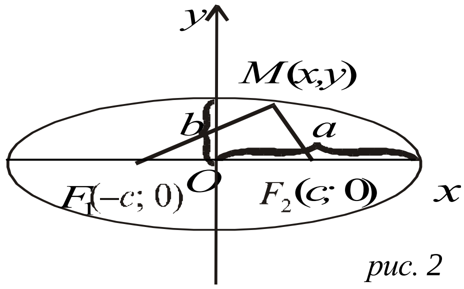

рис. 2

Тоді

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (3)$$

канонічне рівняння еліпса, де $b^2 = a^2 - c^2$.

Розглянемо геометричний зміст параметрів, що входять в рівняння (3). Якщо $x = 0$, $y = \pm\ b$, тобто точки $(0,\ b)$ і $(0,\ -\ b)$ є точками перетину еліпса з віссю Oy. Відрізок завдовжки b називають малою піввіссю еліпса. При $y = 0$, $x = \pm a$ і відповідно $(a,0)$; $(-\ a;\ 0)$ є точками перетину еліпса з віссю Ox. Відрізок завдовжки a — велика піввісь еліпса. З парності виразу (3) за x і за y випливає симетрія еліпса відносно осей Ox і Oy. На рис. 5.10 зображено еліпс.

Ексцентриситет еліпса — це відношення $\varepsilon = \frac{c}{a}$; за означенням $c < a$ і $\varepsilon \in [0,\ 1)$. Оскільки $\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2$, то $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$. З останньої рівності випливає геометричний зміст ексцентриситету, який полягає в тому, що він характеризує *ступінь витягнутості* еліпса. Так, при $\varepsilon = 0 \Rightarrow a = b$ маємо коло, якщо ε наближається до одиниці, то відношення довжини півосей еліпса стає малим, тобто еліпс витягується вздовж осі Ox.

8. Гіпербола, її властивості і графік.

Означення. Множина точок площини, для яких модуль різниці відстаней від двох заданих точок, що називаються фокусами, є величиною сталою, яка дорівнює $2a$ і менша за відстань між фокусами, називається *гіперболою*.

Скористаємось рис. 3, з якого бачимо, що точки F_1 (– c, 0) і F_2 (c, 0) — фокуси гіперболи, точка M (x, y) — точка визначеної множини. Тоді $\left\| MF_1 \right| - \left| MF_2 \right\| = 2a, a < c$.

Канонічне рівняння гіперболи має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{де} \quad b^2 = c^2 - a^2. \ (4)$$

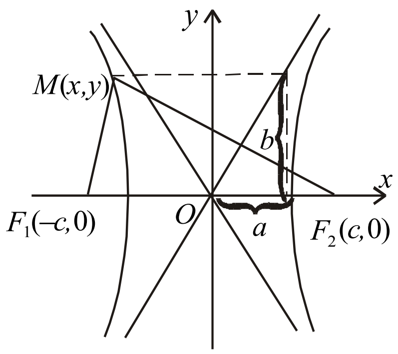

рис.3

Дослідимо здобуте рівняння. Гіпербола не перетинає вісь Oy. При y=0; $x = \pm a$ і точки ($-a$, 0); (a, 0) — точки перетину з віссю Ox. Розглянемо ще рівняння прямих $y = \pm \frac{b}{a} x$, які далі називатимемо *асимптотами гіперболи*.

Враховуючи симетрію відносно осей Ox і Oy, будуємо графік гіперболи, який зображено на *рис.3*.

Відрізки завдовжки b і a називають відповідно *уявною* і *дійсною осями гіперболи*.

Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = \frac{c}{a}$, але $c > a$ і ε >1. Беручи до уваги, що $c^2 = a^2 + b^2$, дістаємо: $\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2$, або $\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$.

З останньої рівності випливає, що для гіперболи ексцентриситет характеризує ступінь нахилу віток гіперболи до осі Ox.

Дві прямі, рівняння яких $x = -\frac{a}{\varepsilon}$; $x = \frac{a}{\varepsilon}$, називаються *директрисами* еліпса і гіперболи. Для еліпса $0 \le \varepsilon < 1$ і відношення $\frac{a}{\varepsilon} > a$, директриси еліпса — це дві прямі, що розміщені симетрично відносно осі Oy і проходять зовні еліпса. Для гіперболи $\varepsilon > 1$ і відношення $\frac{a}{\varepsilon} < a$. Тобто директриси гіперболи розміщені симетрично відносно осі Oy і лежать між вітками гіперболи.

Для еліпса і гіперболи можна сформулювати важливе твердження: *якщо r — відстань від деякої точки еліпса або гіперболи до будь-якого фокуса, а d — відстань від цієї самої точки до директриси, яка відповідає цьому фокусу, то відношення $\frac{r}{d}$ стале й дорівнює ексцентриситету, тобто* $\varepsilon = \frac{r}{d}$.

Розглянуте твердження можна покласти в основу означення цих ліній. *Означення*. Множина точок, для яких відношення відстаней від фокуса і до відповідної директриси — величина стала, що дорівнює ексцентриситету ε, є *еліпс*, *якщо* $\varepsilon < 1$, *і гіпербола*, *якщо* $\varepsilon > 1$.

9. Парабола, її властивості і графік.

Означення. Множина точок площини, що містяться на однаковій відстані від даної точки фокуса і даної прямої, яка не проходить через фокус і називається *директрисою*, є *парабола*.

За означенням $r=d$, отже (*рис.4*):

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2},$$

або $y^2 = 2px$ (5)

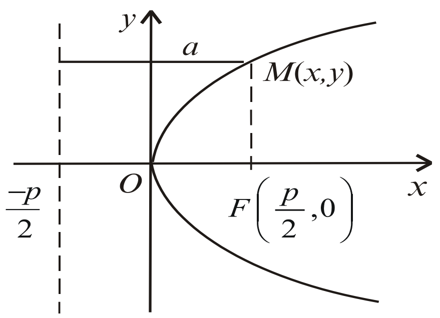

Рис. 4

— канонічне рівняння параболи, коли $\varepsilon = 1$.

Парабола симетрична осі Ox, проходить через початок системи координат. Її графік подано на рис. 4.

Питання для опитування:

- Що називається рівнянням лінії на площині?
- Що називається напрямним вектором прямої?

- Які рівняння прямої ви знаєте?
- Як знайти кут між двома прямими?
- Який існує зв'язок між загальними рівняннями двох паралельних прямих, перпендикулярних прямих?
- Як знайти координати середини відрізка?
- Як знайти точку перетину двох прямих?
- Сформулюйте умови паралельності і перпендикулярності двох прямих. За якою формулою знаходиться відстань від точки до прямої?
- Що називається лінією другого порядку?
- Які криві другого порядку ви знаєте? Скільки їх існує?
- Що називається колом? Який вигляд має канонічне рівняння кола?
- Що називається еліпсом? Запишіть канонічне рівняння еліпса.
- Що таке фокус еліпса, мала, велика півосі, ексцентриситет еліпса?
- Який існує зв’язок між еліпсом і колом. Що таке ексцентриситет еліпса?
- Що називається гіперболою? Від чого залежить форма гіперболи?
- Запишіть канонічне рівняння гіперболи. Виведіть рівняння асимптот гіперболи.
- Дайте означення параболи. Що таке директриса параболи?
- У чому полягає характерна особливість директрис еліпса, гіперболи і параболи?