Лекція № 7.

Тема: Поняття функціональної залежності. Способи задання та властивості функцій.

План:

1. **Поняття функції. Способи задання функції.**
2. **Елементарні функції.**
3. **Класифікація функцій за їхніми властивостями.**
4. **Обернені, неявно і параметрично задані функції.**
5. **Застосування функцій в економіці.**

Диференціальне числення – розділ математики, в якому розглядається дослідження функцій за допомогою похідних та диференціалів.

Центральне поняття диференціального числення – похідна – широко використовується при розв’язуванні багатьох задач з математики, фізики та інших наук, а також при вивченні різних процесів. Якщо перебіг того чи іншого процесу описується деякою функцією, то дослідження даного процесу зводиться до вивчення властивостей цієї функції та її похідної.

1. Поняття функції. Способи задання функції.

Величина називається змінною (сталою), якщо в умовах даної задачі вона набуває різних (тільки одного) значень.

Розглянемо дві змінні величини $x \in D \subseteq R$ і $y \in E \subseteq R$.

Означення. *Функцією* $y=f(x)$ називається така відповідність між множинами D і E, за якої кожному значенню змінної x відповідає одне й тільки одне значення змінної y.

При цьому вважають, що:

x — незалежна змінна, або аргумент;

y — залежна змінна, або функція;

f — символ закону відповідності;

D — область визначення функції;

E — множина значень функції.

Означення. *Числовою функцією* з областю визначення х називається залежність, при якій кожному числовому значенню х з множини Х ставиться у відповідність єдине деяке число y.

Позначають функцію $y=f(x)$. Змінну x називають *незалежною змінною або аргументом*, змінну y – *залежною змінною або функцією*.

Означення. *Областю визначення функції* називається множина значень, яких набуває незалежна змінна x. Позначається $D(f)$.

Означення. *Областю значень функції* називається множина значень, яких набуває залежна змінна y при всіх значеннях x з області визначення функції. Позначається $E(f)$.

Означення. *Графіком функції* $y=f(x)$ називається множина точок $M(x,f(x))$ координатної площини, абсциси яких належать області визначення функції, а ординати є відповідними значеннями цієї функції.

<u>Приклад :</u> Знайти область визначення функцій:

1) $y=\sqrt{x-1}$,

2) $y=\dfrac{1}{x}$.

Розв'язання.

1) Оскільки, вираз що стоїть під знаком квадратного кореня не може бути від'ємним, то щоб знайти область визначення функції розв'яжемо нерівність:

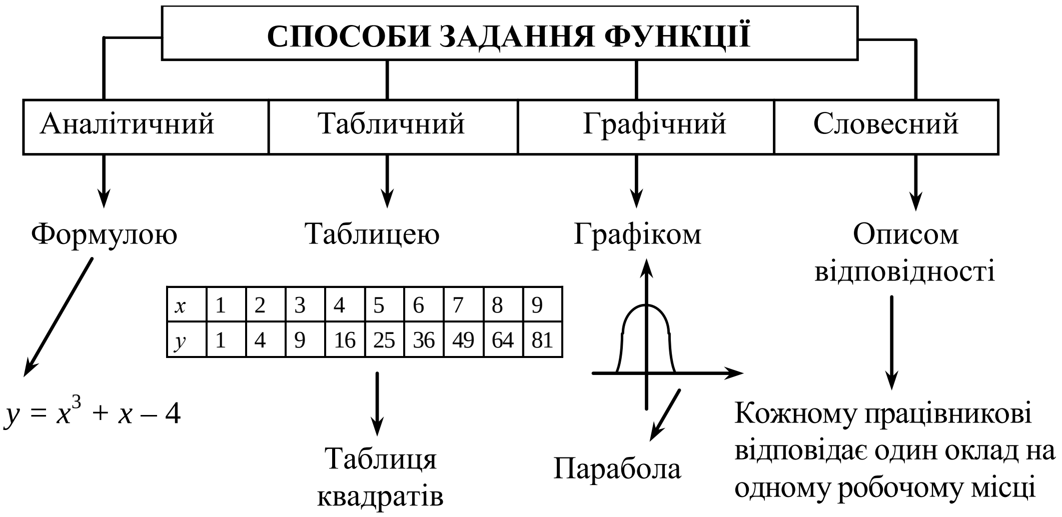
$x-1 \geq 0$

$x \geq 1$

Отже, $D(f)=[1; +\infty]$.

2) Ділить на нуль не можна, тому область визначення функції дорівнює $D(f)=(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Розрізняють такі способи завдання функції: *аналітичний, графічний, табличний, словесний.*



2. Елементарні функції.

До основних елементарних функцій відносяться:

1) ***Лінійна функція*** виду $y = ax + b$, де $a, b \in R$.

2) ***Степенева функція*** – $y = x^a$, де a — будь-яка дійсна стала.

3) ***Показникова функція*** – $y = a^x$, якщо $a > 0$, $a \neq 1$.

4) ***Логарифмічна функція*** – $y = \log_a x$, якщо $a > 0$, $a \neq 1$.

Логарифмічна та показникова функції взаємно обернені.

5) ***Тригонометричні функції*** – $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg} x$, $y = \mathrm{ctg} x$.

6) ***Обернені тригонометричні функції*** – $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = \mathrm{arcctg}\, x$.

Вони є оберненими до функцій $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$.

7) ***Гіперболічний косинус і синус*** – функції $\mathrm{ch}\, x = \dfrac{e^{-x} + e^{x}}{2}$, $\mathrm{sh}\, x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$, а функції $\mathrm{th}\, x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$, $\mathrm{cth}\, x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$ — відповідно **гіперболічний тангенс** *і* **котангенс**.

Для гіперболічних функцій справджуються співвідношення:

1) $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$; 2) $\mathrm{sh}2x = 2\mathrm{sh}x\mathrm{ch}$;

3) $\mathrm{th}x \cdot \mathrm{cth}x = 1$; 4) $\mathrm{th}x = \dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}$.

Графіки головних гіперболічних функцій наведено на рис. 1 і 2.

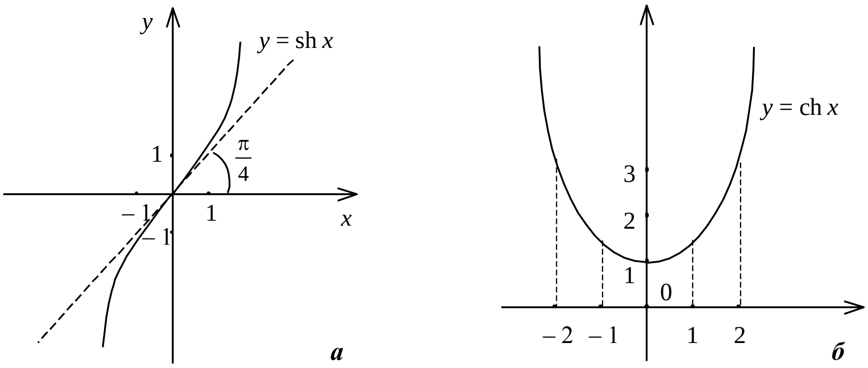


Рис. 1.

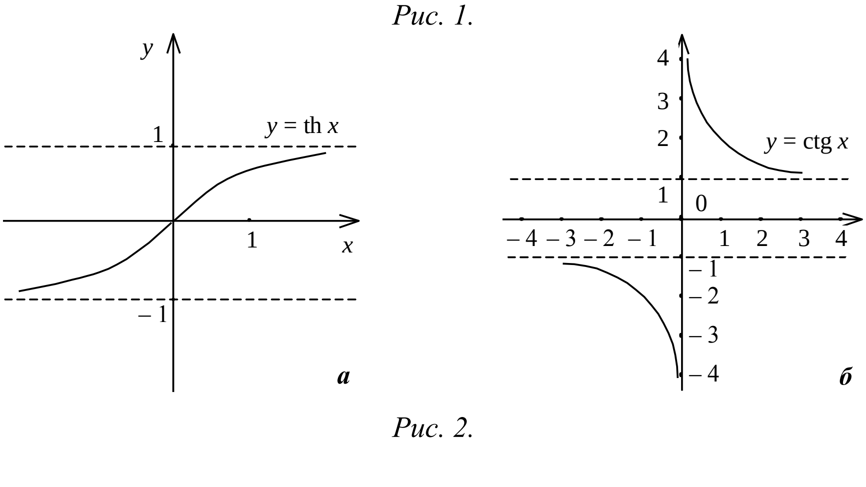


Рис. 2.

Із основних елементарних функцій решту елементарних функцій дістають:

1) за допомогою алгебраїчних дій;

2) побудовою складної (складеної) функції.

Означення. Функції, які дістають з основних елементарних функцій за допомогою скінченного числа алгебраїчних дій і скінченного числа операцій, що полягають у побудові складної функції, називаються **елементарними**.

Наприклад, $y=\frac{(x\cos x)^4}{x+6^{8x}}+\sqrt[17]{6^x}+5$ — елементарна функція.

8) Функція $y = P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$ називається ***многочленом n-го степеня.***

Наприклад, $y = ax^2 + a_1x + 67$, $a, a_1, \in R$.

9) Функція $y=\frac{P_1(x)}{P_2(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}$ називається ***дробово-раціональною функцією***.

10) Функція, до складу дій над аргументом якої входить дія добування кореня, ***називається ірраціональною функцією.***

3. Класифікація функцій за їхніми властивостями.

Можна виділити такі класи функцій.

1) **Обмежені та необмежені функції**.

Означення. Функція *y=f(x)*, визначена на множині X, називається обмеженою зверху (знизу) на цій множині, якщо множина її значень обмежена зверху (знизу). Іншими словами $\exists M\in R$, що $\forall x\in X$ виконується нерівність $f(x)\le M$ $(f(x)\ge M)$.

Означення. Функція *f(x)*, обмежена зверху і знизу на множині X, називається просто *обмеженою на цій множині*.

Означення. Функція *y=f(x),* визначена на множині X, і така що не є обмеженою зверху (знизу) на цій множині, називається *необмеженою зверху (знизу)*.

Наприклад: Функція *y=sinx* –обмежена на R , а функція $y=x^2$-обмежена знизу на R і необмежена зверху на R.

2) **Парні та непарні функції**.

Означення. Функція $y=f(x),\ x\in X$, називається <u>*парною (непарною)*</u>, якщо її область визначення симетрична відносно нуля, т/б якщо $x\in X$ то й $-x\in X$ і для $\forall x\in X$ виконуються рівності

$f(-x)=f(x)$ - функція парна

$f(-x)=-f(x)$ - функція непарна

Наприклад: Функція $y=\sin x$ –непарна, так як $\sin(-x)=-\sin x$, а функція $y=x^2$-парна, так як $(-x)^2=x^2$.

Графік парної функції симетричний відносно вісі ординат, а графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

3) **Монотонні функції**

Означення. Функція $f(x)$, визначена на множині X, називається

<u>*Зростаючою*</u>	на цій множині,	$f(x_1)<f(x_2)$
<u>*Спадною*</u>	якщо $\forall x_1\in X,\ x_2\in X$,	$f(x_1)>f(x_2)$
<u>*Не зростаючою*</u>	$x_1<x_2$ справджуються	$f(x_1)\geq f(x_2)$
<u>*Неспадною*</u>	відповідні нерівності	$f(x_1)\leq f(x_2)$

Наприклад: Функція $y=x$ – зростаюча на всій області визначення, а функція $y=x^2$ – не є монотонною на всій області визначення.

4) **Періодичні функції**

Означення. Функція $f(x)$ називається <u>*періодичною*</u>, якщо $\exists T\neq 0$, що $f(x+T)=f(x)\ \forall\ x\in X$.

Наприклад: Функція $y=\sin x$ –періодична з періодом $T=2\pi$, а функція $y=x$-неперіодична.

4. Обернені, неявно і параметрично задані функції.

Означення. Функція $y = F(u)$, де $u = \varphi(x)$, називається *складною* (*складеною*) *функцією*, або *суперпозицією* функцій $F(u)$ та $\varphi(x)$, і позначається $y = F(\varphi(x))$.

Приклад. $y = 2^{\sin^2 x}$ — складна функція, вона буде суперпозицією трьох функцій: $y = 2^u$, $u = v^2$, $v = \sin x$.

Приклад. $y = \mathrm{tg}(3u)\cdot f(u)$, де $u = 3x + 1$, $f(x) = (2x + 5)^3$. Оскільки $f(u) = (2u + 5)^3$, то $y = \mathrm{tg}(3(3x + 1))(2(3x + 1) + 5)^3 = \mathrm{tg}(9x + 3)(6x + 7)^3$.

Означення. Нехай функція $y = f(x)$ встановлює відповідність між множинами D та E. Якщо обернена відповідність між множинами E та D буде функцією, то вона називається *оберненою до даної* $y = f(x)$; її позначають $y = f^{-1}(x)$.

За означенням, для взаємно обернених функцій маємо:

$$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x.$$

Приклад. $f(x) = x^3$, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ — взаємно обернені функції:

$$\sqrt[3]{x^3} = (\sqrt[3]{x})^3 = x.$$

Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$ (рис. 1).

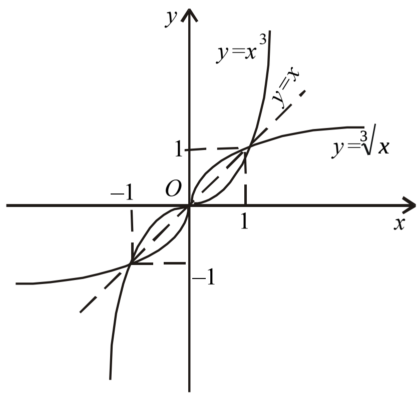


рис. 1

Означення. Функція (функціональна залежність змінної y від змінної x) називається *неявною*, якщо її задано рівнянням $F(x, y) = 0$, яке не розв'язане відносно змінної y.

Приклад. Рівняння $y + x + 2^y = 0$ визначає неявну функцію *y* від *x*.

Означення. Система рівнянь

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

визначає параметричну залежність функції *y* від змінної *x* (*t*—параметр).

Вираз $y = f(x)$ самої залежності *y* від *x* можна дістати виключенням параметра *t* з останньої системи рівнянь.

Приклад. Параметрична залежність

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

визначає коло радіуса *r* з центром у початку прямокутної декартової системи координат.

Справді, зводячи до квадрата параметричні рівняння і підсумовуючи результат, дістаємо: $x^2 + y^2 = r^2 \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)$, або $x^2 + y^2 = r^2$.

5. Застосування функцій в економіці.

Спектр використання функцій в економіці досить широкий. Найчастіше використовуються в економіці такі функції:

1. ***Функція корисності*** **–** залежність корисності, тобто результату, ефекту деякої дії, від рівня (інтенсивності) цієї дії.
2. ***Виробнича функція*** – залежність результату виробничої діяльності від факторів, які його зумовлюють.
3. ***Функція випуску*** **(частковий вид виробничої функції) –** залежність обсягу виробництва від наявності або споживання ресурсів.
4. ***Функція витрат*** **(частковий вид виробничої функції) –** залежність витрат виробництва від обсягу продукції.

5. ***Функція попиту, споживання і пропозиції*** **–** залежність обсягу попиту, споживання або пропозиції, щодо окремих товарів або послуг від різних факторів (наприклад, ціни, доходу і т.д.)

Нехай ринок якого-небудь окремого товару характеризується наступними функціями попиту та пропозиції:

$$D=D(P),\ S=S(P).$$

Для існування рівноваги, ціна повинна бути такою, щоб товар на ринку був розпроданий, тобто виконувалась рівність

$$D(P)=S(P).$$

Ціна рівноваги P задається цим рівнянням (яке може мати множину рішень), а відповідний об'єм покупок-продажів, що позначається через X – наступним рівнянням:

$$(X=D(P)=S(P)).$$

Приклад. Нехай відома функція ціни p від попиту q. Якщо реалізовано q одиниць певного товару, то добуток qp (кількості одиниць товару на його ціну) є сумарний виторг, або, як його ще називають, **функція сумарного виторгу:** $u = qp = q\varphi(q)$. Наприклад, якщо залежність ціни від попиту подається у вигляді $p=\frac{400}{q+4}$, то функція сумарного виторгу буде така:

$$u=\frac{400q}{(q+4)}.$$

Приклад. Відомо, що пропозиція деякого товару залежить від його ціни. Якщо через p позначити ціну, а через S — пропозицію, то функція $S = f(p)$ називається **функцією пропозиції.** Навпаки, кожній пропозиції S відповідає певна ціна. Тоді залежність $p = q(S)$ є **функцією ціни від пропозиції.**

Питання для опитування:

- Що ми розуміємо під поняттям функція? Навести приклади.
- Що таке область визначення функції?
- Що називається областю значень функції? Наведіть приклади.
- Які існують способи задання функцій?
- Наведіть приклади основних елементарних функцій.
- Які властивості функцій ви знаєте?
- Яка функція називається складеною, елементарною?
- Як класифікують елементарні функції?
- Які функції називаються монотонними? Навести приклади.
- Яка функція називається парною, непарною, періодичною? Які особливості цих функцій?
- Яка функція називається неявно заданою, параметрично заданою?
- Які функції використовуються в економіці?