Лекція № 8.

Тема: Границя функції та неперервність.

План:

1. **Границя функції в точці і при х→∞.**
2. **Перша та друга визначні границі.**
3. **Нескінченно великі і нескінченно малі функції.**
4. **Основні теореми про границі.**
5. **Неперервність функції в точці і на проміжку.**
6. **Точки розриву функції. Дослідження функції на неперервність.**

1. Границя функції в точці і при х→∞.

Означення. Нехай $x_0 \in (a,\ b)$ і функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі (a, b) за винятком, можливо, точки x_0. Якщо для будь-якої збіжної послідовності x_n $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0,\ x_0 \neq x_n\right)$ існує $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, то говорять, що функція $f(x)$ має границю A при $x \to x_0$.

Позначення: $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A.}$

Інше означення границі функції дав Коші:

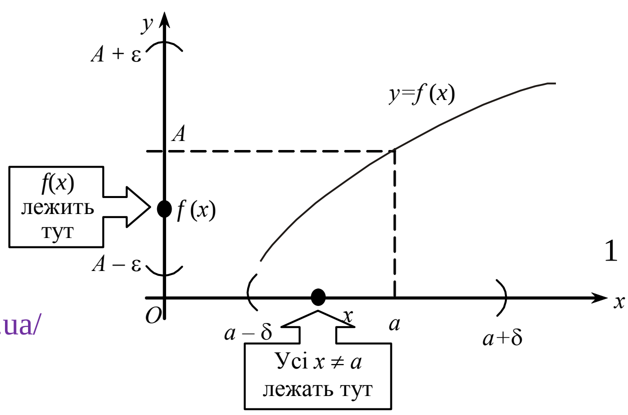
Означення(Коші). **Границею функції** $y = f(x)$ при x, що прямує до a, називається число A, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$, таке що для всіх x, які задовольняють нерівність

$$0 < |x - a| < \delta,$$

випливає

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Позначення:



$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = A.}$$

Графічна ілюстрація:

рис.1

Пояснення. Для всіх *x*, що містяться поруч із точкою *x*=*a*, значення функції *f*(*x*) лежать біля *A*.

Приклад. Довести за означенням границі функції, що

$$\lim_{x\to 1}(5x-3)=2\,.$$

- Застосовуємо означення границі, коли $f(x) = 5x - 3$, $a = 1$, $A = 2$.

Згідно з означенням потрібно показати, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, таке що для всіх *x*

$$0<|x-1|<8\Rightarrow|(5x-3)-2|<\varepsilon\,.$$

Маємо:

$$|5x-5|<\varepsilon;$$
$$5|x-1|<\varepsilon;$$
$$|x-1|<\frac{\varepsilon}{5}.$$

Отже, можна взяти $\delta=\dfrac{\varepsilon}{5}$ (рис. 2).

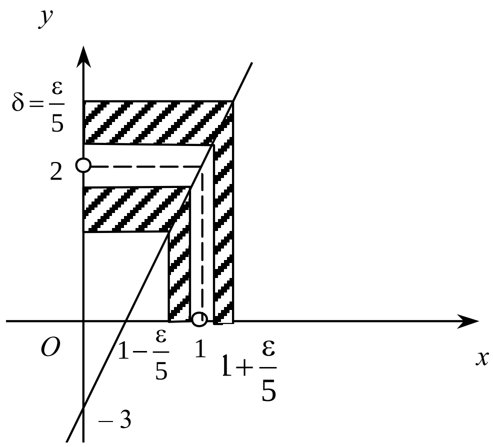


рис. 2

Для функції $y=5x-3$ нерівність $|f(x)-2|<\varepsilon$ виконується, як тільки $0<|x-2|<\frac{\varepsilon}{5}$. ●

***Означення*: Правою границею функції** $y=f(x)$, коли x прямує до a справа, називається число l, таке що $\varepsilon>0$ існує $\delta>0$, при якому для всіх x, що задовольняють нерівність $a<x<a+\delta$, Маємо $|f(x)-A_+|<\varepsilon$.

Позначення: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=A_+$

Графічна ілюстрація

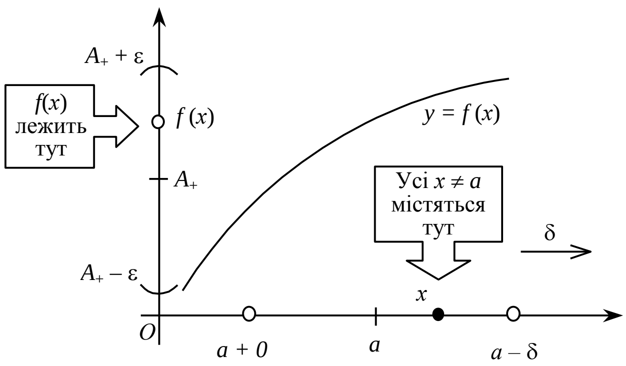


рис. 7.5

***Означення*: Лівою границею** *функції* $y=f(x)$, коли x прямує до a зліва, називається число A_-, таке що при будь-якому $\varepsilon>0$ існує $\delta>0$ таке, що для всіх x, які задовольняють нерівність $a-\delta<x<a$, Маємо $|f(x)-A_-|<\varepsilon$.

Позначення: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=A_-$.

Інколи границю $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ називають ***двосторонньою границею***, а границі зліва та справа — ***односторонніми границями***.

Зв'язок між односторонніми та двосторонніми границями: Функція $y=f(x)$ має границю в точці $x = a$ тоді і тільки тоді, коли існують границі зліва та справа в точці $x = a$ і дорівнюють одна одній. Символічно:

$$\lim_{x\to a} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to a+0} f(x)=A \text{ і } \lim_{x\to a-0} f(x)=A.$$

2. Перша та друга визначні границі.

Перша визначна (особлива) границя $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

Границі — наслідки першої особливості границі:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1.$ 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1.$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}=1.$ 4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}.$

Зауваження. За допомогою першої особливої границі можна досліджувати невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$ для виразів з тригонометричними функціями.

Приклад. $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

Приклад. $$\lim_{x\to\pi}\frac{1-\sin x/2}{(\pi-x)^2}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

● Для того щоб скористатися першою особливою границею, потрібно виконати таку заміну змінної *x*, щоб нова змінна прямувала до нуля, наприклад $\pi-x=y$.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1-\sin\frac{x}{2}}{(\pi-x)^2}=\left|\begin{array}{l}\pi-x=y\\ x=\pi-y\\ x\to\pi\\ y\to 0\end{array}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{y}{2}\right)}{y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos\frac{y}{2}}{y^2}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{2\sin^2\frac{y}{4}}{y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{y}{4}\right)}{16\left(\frac{y}{4}\right)^2}=\frac{1}{8}.$$

Друга визначна(особлива) границя $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

Границі — наслідки другої особливої границі:

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$. 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}=e^{ab}$. 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$.

Зауваження: За допомогою другої особливої границі та її наслідків можна досліджувати невизначеності

$$\left[\frac{0}{0}\right],\ \left[1^{\infty}\right],\ \left[\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}\right].$$

<u>Приклад.</u>

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x-1}=\left[\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)^{2x-1}=\left[1^{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}\cdot\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\left(1+\frac{-2}{x}\right)^{2x}\left(1+\frac{3}{x}\right)}=\frac{e^{3\cdot 2}\cdot 1}{e^{-2\cdot 2}\cdot 1}=e^{10}.$$

<u>Приклад.</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\ln(2x+1)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x\cdot 2x\cdot 5x}{5x\cdot\ln(2x+1)\cdot 2x}=\left|\begin{array}{l}\frac{\sin 5x}{5x}\xrightarrow[x\to 0]{}1\\ \frac{2x}{\ln(2x+1)}\xrightarrow[x\to 0]{}1\end{array}\right|=\frac{5}{2}.$$

3. Нескінченно великі і нескінченно малі функції.

Розглянемо функції $y=\alpha(x)$, $y=\beta(x)$, $y=\gamma(x)$ і припустимо, що

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=\lim_{x\to a}\beta(x)=\lim_{x\to a}\gamma(x)=0,$$

де a — скінчена точка або нескінченність, тобто $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ — нескінченно малі величини.

Означення. Нескінченно малі величини $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються ***нескінченно малими величинами одного порядку мализни***, якщо

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A,\quad A\neq 0,\quad A\neq\infty.}$$

Означення. Нескінченно мала величина $\alpha(x)$ називається ***нескінченно малою величиною вищого порядку мализни, порівняно з*** $\beta(x)$, якщо

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0.}$$

Означення. Якщо границя $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не існує, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються ***непорівнянними нескінченно малими величинами.***

<u>Приклад.</u> Величина $\alpha(x)=\sin x^2$ — нескінченно мала вищого порядку мализни порівняно з x, оскільки

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x}=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin x^2}{x^2}}_{\downarrow\atop 1}x=\lim_{x\to 0}1\cdot x=0.\bullet$$

<u>Приклад.</u> Величини $x\sin\frac{1}{x}$ і x нескінченно малі при $x\to 0$ та непорівнянні, оскільки

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}\text{ — не існує. }\bullet$$

Означення. Нескінченно малі величини $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to\alpha$ називаються ***еквівалентними***, якщо

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1.}$$

Позначення: Еквівалентність нескінченно малих величин $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ позначається $\alpha\sim\beta$ і означає, що величина α «поводиться як» величина β.

<u>Приклад.</u> Величини e^x-1 і x при $x\to 0$ еквівалентні, оскільки

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.\ \bullet$$

Теорема 1. Для того щоб дві нескінченно малі величини були еквівалентними, необхідно і достатньо, щоб їх різниця $\gamma=\alpha-\beta$ була нескінченно малою величиною вищого порядку мализни порівняно з α і β.

Достатність. Нехай

$$\lim_{x\to a}\frac{\gamma}{\beta}=0 \text{ і } \lim_{x\to a}\frac{\gamma}{\alpha}=0. \text{ Тоді}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha-\beta+\beta}{\beta}=\lim_{x\to a}\frac{\gamma+\beta}{\beta}=\lim_{x\to a}\left(\frac{\gamma}{\beta}+1\right)=1$$

Отже, $\alpha\sim\beta$.

Теорема 2. **Нескінченно малі величини, які входять до добутку та відношення, можна замінювати їм еквівалентними.**

Означення. Нехай $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ — нескінченно малі величини. У разі, коли

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{\beta}{\alpha^k}=A,\ A\neq 0,\ A\neq\infty,}$$

говорять, що *нескінченно мала величина* β *має порядок k відносно нескінченно малої величини* α *або скорочено*: β — *величина порядку k.* Тоді

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{\beta}{A\alpha^k}=1.}$$

Величина $A\alpha^k$ — називається ***головною частиною нескінченно малої величини*** β.

Приклад. Порівняємо нескінченно малі величини $\beta(x)=1-\cos x$ і $\alpha(x)=x$ при $x\to 0$.

- $$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}\approx 2\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^2}{2}.$$

Тоді

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{4\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}.$$

Отже, величина $1-\cos x$ є нескінченно малою другого порядку мализни відносно x. Її головна частина дорівнює $\frac{1}{2}x^2$.

Шкала еквівалентних нескінченно малих величин

1. $\boxed{\sin x \sim x, \quad x \to 0.}$

2. $\boxed{\ln(1+x) \sim x,\ \log_a(1+x) \sim (\log_a e)x,\ \ x \to 0.}$

3. $\boxed{e^x - 1 \sim x,\ a^x - 1 \sim x\ln a,\ x \to 0.}$

4. $\boxed{(1+x)^{\mu} - 1 \sim \mu x,\ x \to 0.}$

5. $\boxed{\arcsin x \sim x,\ x \to 0.}$

6. $\boxed{\operatorname{tg} x \sim x,\ x \to 0.}$

7. $\boxed{\operatorname{arctg} x \sim x,\ x \to 0.}$

Зауваження. У виразі, який містить суму та різницю, заміна нескінченно малих величин еквівалентними їм може іноді призвести до помилки.

<u>Приклад.</u> Знайдемо границю

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{x^2}.$$

• Спосіб 1-й. Скориставшись формулою $\ln(1+\alpha)\sim\alpha$, запишемо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+x^2+1-x+x^2}{x^2}=2.$$

• Спосіб 2-й. У чисельнику застосуємо формулу $\ln a+\ln b=\ln ab$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)(1-x+x^2)}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2+x^4)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^4}{x^2}=1.$$

ВИСНОВОК. Спосіб 1-й помилковий. Якщо в сумі або різниці при заміні нескінченно малих їм еквівалентними взаємно знищуються малі вищого порядку, то така заміна неприпустима.

4.Основні теореми про границі.

Теорема 1. Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, то функція $f(x)$ обмежена при $x\to a$.

Теорема 2. Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A,\ \ A\neq 0$, то знайдеться такий δ-окіл точки *a*, де ця функція набуває значень, які мають той самий знак, що й A.

Теорема 3. Якщо $f(x)=c$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c$.

Теорема 4. **Якщо** $\varphi(x)\le f(x)\le\psi(x)$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=A$, то існує границя $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.

Теорема 5.

Якщо існують границі $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A,\ \ \lim\limits_{x\to a}\psi(x)=B,$

то виконуються такі співвідношення:

1) $\lim\limits_{x\to a}(\varphi(x)+\psi(x))=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)+\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=A+B$**,**

2) $\lim\limits_{x\to a}(\varphi(x)\psi(x))=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=AB$**,**

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}{\lim\limits_{x\to a}\psi(x)}=\dfrac{A}{B}$**, якщо** $B\neq 0$**.**

<u>Приклад</u>. Знайти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$.

● Тут чисельник та знаменник дробу прямують до нуля при $x\to 3$ (невизначеність вигляду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$). Оскільки $\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}=\dfrac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)}=\ =\dfrac{x+3}{x}$ при $x\neq 3$, то $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+3}{x}=2.$ Звідси $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}=2.$

<u>Приклад</u>. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

● Домножимо чисельник та знаменник дробу на суму $\sqrt{x+4}+2$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{1}{4}.$$

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right].$

● Поділимо чисельник та знаменник на старший степінь x, тобто на x^3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{4}.$$

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to3\pm0}\left(x+2^{\frac{1}{x-3}}\right)^{-1}.$

● Якщо $x\to3-0$, то $\dfrac{1}{x-3}\to-\infty, 2^{\frac{1}{x-3}}\to0; \lim\limits_{x\to3-0}\left(x+2^{\frac{1}{x-3}}\right)^{-1}=\dfrac{1}{3}.$

Якщо $x\to3+0$, то $\dfrac{1}{x-3}\to+\infty, 2^{\frac{1}{x-3}}\to+\infty; \lim\limits_{x\to3+0}\left(x+2^{\frac{1}{x-3}}\right)^{-1}=0.$

5. Неперервність функції в точці і на проміжку.

Означення. Функція $y=f(x)$ називається ***неперервною в точці*** $x=x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$

Виходячи з означення границь функції, поняття неперервності функції в точці можна зобразити так:

$$\begin{pmatrix} f(x) \text{ — неперервна} \\ \text{при } x=x_0 \end{pmatrix}:=.$$

$$:=\left((\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ 0<|x-x_0|<\delta)\Rightarrow(|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)\right)$$

Звідси випливає, що для *неперервності функції* в точці мають виконуватися такі *умови*:

а) точка $x = x_0$ належить області визначення функції $D(f)$, тобто $f(x_0)$ існує;

б) деякий окіл точки $x = x_0$ входить до області визначення функції, наприклад $(x_0-\delta, x_0+\delta)\subset D(f)$;

в) границя $f(x)$ при $x\to x_0$ дорівнює значенню функції в точці $x = x_0$, тобто дорівнює $f(x_0)$.

Позначимо через $\Delta x = x - x_0$ приріст аргументу, а через $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ — приріст функції (рис. 3).

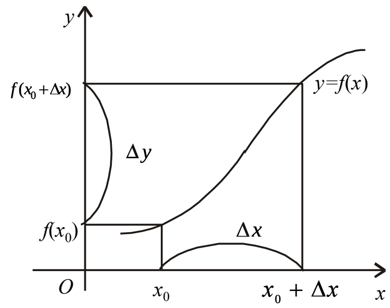


Рис. 3

Означення. Функція $y = f(x)$ називається ***неперервною в точці*** $x = x_0$, якщо в цій точці нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції, тобто

$$\begin{pmatrix} f(x) \text{ — неперервна} \\ \text{при } x = x_0 \end{pmatrix} := \left((\Delta x = x - x_0 \to 0) \Rightarrow (\Delta y = f(x) - f(x_0) \to 0) \right).$$

Означення. Функція $y = f(x)$ називається ***неперервною в точці*** $x = x_0$, якщо границя функції дорівнює функції від границі аргументу при $x \to x_0$, тобто

$$\begin{pmatrix} f(x) \text{— неперервна} \\ \text{при } x = x_0 \end{pmatrix} := \left(\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x \right) \right).$$

Означення. Функція $y = f(x)$ називається ***неперервною в точці*** $x = x_0$, якщо односторонні границі функції зліва й справа в цій точці існують, рівні між собою і дорівнюють значенню функції у цій точці, тобто:

$$\begin{pmatrix} f(x) \text{— неперервна} \\ \text{при } x = x_0 \end{pmatrix} := \left(\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \right).$$

Означення. Функція називається ***неперервною на проміжку***, якщо вона неперервна у кожній точці цього проміжку.

Таким чином, поняття неперервності функції у точці задається чотирма, хоч і рівноправними, але різними за формулюванням означеннями.

Використання конкретного означення неперервності функції в точці визначається специфікою задачі.

<u>Приклад.</u> Дослідити на неперервність функцію $y=\sin x$.

● Область визначення функції $y=\sin x - D=R$.

Візьмемо довільне $x_0 \in D=R$, надамо x_0 приросту Δx, тоді приріст функції Δy буде

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0 = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Розглянемо

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta x\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\right)=0.$$

Дамо необхідні пояснення: при $\Delta x\to 0 \Rightarrow \Delta x$ — н.м.в.; $\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\to 1;$ $\cos\left(x_0+\dfrac{\Delta x}{2}\right)$ — величина обмежена $\left(\left|\cos\left(\dfrac{\Delta x}{2}+x_0\right)\right|\le 1\right)$, отже, добуток $\Delta y=\Delta x\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(\dfrac{\Delta x}{2}+x_0\right)$ є н.м.в.

Таким чином, з $\Delta x\to 0 \Rightarrow \Delta y\to 0.$

Звідси функція $y=\sin x$ неперервна $\forall x_0\in R,$ тобто на всій області визначення.

6.Точки розриву функції. Дослідження функції на неперервність.

Означення. Функція $y=f(x)$ називається ***розривною*** в точці $x=x_0$, якщо порушується хоча б одна з умов рівності

$$\lim_{x\to x_0-0}f(x)=\lim_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0).$$

Розрізняють ***точки розриву 1-го і 2-го роду***. Розриви 1-го роду бувають ***усувні*** й ***неусувні***; розриви 2-го роду — завжди неусувні.

Означення. Точка $x = x_0$ називається ***точкою розриву 2-го роду*** для функції $y = f(x)$, якщо в цій точці не існує хоча б одна з односторонніх границь (зліва чи справа).

Означення. Точка $x = x_0$ називається ***точкою розриву 1-го роду*** *(розрив неусувний)* для функції $y = f(x)$, якщо односторонні границі (зліва і справа) функції у цій точці існують, але не рівні між собою, тобто $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

Означення. Точка $x = x_0$ називається точкою ***розриву 1-го роду*** *(розрив усувний)* для функції $y = f(x)$, якщо односторонні границі функції в цій точці існують, рівні між собою, але не дорівнюють значенню функції в цій точці або функція у цій точці не існує, тобто $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$.

Зауваження. Точка $x = x_0$ усувного розриву відзначається тим, що існує $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, але $f(x_0) \neq A$. Тому на основі функції $f(x)$ можна побудувати функцію

$$F(x) = \begin{cases} f(x) \text{ при } x \neq x_0 \\ A \text{ при } x = x_0, \text{яка буде неперервною в точці } x = x_0, \end{cases}$$

Методика дослідження функцій на неперервність.

1. Знайти область визначення функції $D(y)$.

2. Дослідити функцію на неперервність у відкритих проміжках $D(y)$.

3. Визначити скінченні граничні точки (с.г.т.) $D(y)$ і обчислити односторонні границі функції у цих точках.

4. Зробити висновок про характер точок розриву (якщо вони є) і побудувати графік функції поблизу цих точок. Для зручності побудови графіка функції рекомендується записати координати граничних точок графіка функції $P_i(x_0 \pm 0;\ y_0 \pm 0)$. Символічний запис абсциси граничної точки $x_0 \pm 0$ означає, що абсциса довільної точки графіка функції прямує до x_0 зліва (x_0 – 0) або справа (x_0 + 0); а запис $y_0 \pm 0$ означає, що ордината довільної точки графіка функції при цьому прямує до y_0 знизу (y_0 – 0) або зверху (y_0 + 0). Наприклад, для граничних точок $P_1(2-0;\ +0)$ і $P_2(2+0;\ 1-0)$ графік функції підходить до цих точок так, як показано на рис. 7.7.

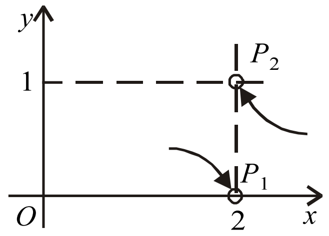


Рис. 7.7

До точки P_1 графік підходить зліва і зверху, а до точки P_2 — справа і знизу.

<u>Приклад.</u> Дослідити на неперервність функцію $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$.

● Область визначення цієї функції $D = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. На кожному з інтервалів області визначення функція буде неперервна, як суперпозиція неперервних елементарних функцій. Скінченною граничною точкою D функції буде x = 1. Обчислимо такі границі:

$$\lim_{x \to 1-0} y = \lim_{x \to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \left| \begin{array}{l} x \to 1-0 (x<1) \\ x-1 \to -0 \\ \dfrac{1}{x-1} \to -\infty \\ 2^{-\infty} \to \dfrac{1}{2^{+\infty}} \to +0 \end{array} \right| = +0;$$

$$\lim_{x \to 1+0} y = \lim_{x \to 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \left| \begin{array}{l} x \to 1+0 (x>1) \\ x-1 \to +0 \\ \dfrac{1}{x-1} \to +\infty \\ 2^{\frac{1}{x-1}} \to +\infty \end{array} \right| = +\infty.$$

Отже, x = 1 — точка розриву 2-го роду, бо одна з односторонніх границь не існує.

Граничні точки графіка функції: P1 (1 – 0; + 0), P2(1 + 0; + ∞). Графік функції $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$ поблизу точки розриву показано на рис. 4. Зауважимо, що гранична точка P2 (1 + 0; + ∞) лежить на нескінченності.

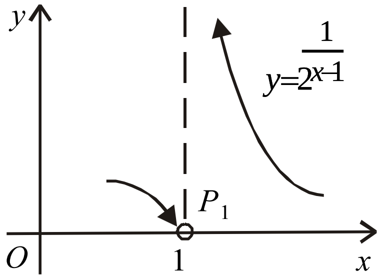


Рис. 4

Питання для опитування:

- Що ми розуміємо під поняттям границя функції?
- Сформулюйте означення границі функції $f(x)$, коли $x \to x_0$.
- Сформулюйте означення границі функції $f(x)$, якщо $x \to \infty$.
- Як геометрично можна інтерпретувати границю функції?
- Які односторонні границі ви знаєте?
- Які визначні границі ви знаєте?
- Чим відрізняється нескінченно мала функція від нескінченно великої функції?
- Назвіть основні теореми про границі.
- Яка функція називається неперервною в точці; на проміжку?
- Які точки розриву ви знаєте?
- Що називають усувним розривом?
- Поясніть методику дослідження функції на неперервність.