ЛЕКЦІЯ № 9.

ТЕМА: ПОХІДНА ФУНКЦІЇ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛ. ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ.

План:

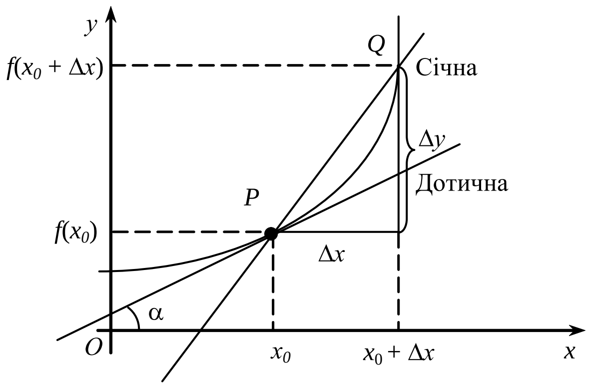
1. **Задачі, що приводять до поняття похідної. Означення похідної функції.**
2. **Геометричний і механічний зміст похідної.**
3. **Правила диференціювання функцій.**
4. **Таблиця похідних.**
5. **Поняття диференціалу функції, його геометричний зміст. Властивості диференціала.**
6. **Застосування диференціалу до наближених обчислень.**

Диференціальне числення – розділ математики, в якому розглядається дослідження функцій за допомогою похідних та диференціалів.

Центральне поняття диференціального числення – похідна – широко використовується при розв'язуванні багатьох задач з математики, фізики та інших наук, а також при вивченні різних процесів. Якщо перебіг того чи іншого процесу описується деякою функцією, то дослідження даного процесу зводиться до вивчення властивостей цієї функції та її похідної.

1. Задачі, що приводять до поняття похідної. Означення похідної функції.

До поняття похідної приводять такі задачі: задача про швидкість прямолінійного руху, задача про густину неоднорідного стержня, задача про силу струму, задача про теплоємність, задача про дотичну до кривої.



Розглянемо задачу про дотичну до кривої. Нехай крива в прямокутній системі координат xOy задана рівнянням $y=f(x)$, є неперервною, визначеною в деякому околі точки x_0. і має не вертикальну дотичну в точці $P(x_0, f(x_0))$. Знайдемо кутовий коефіцієнт цієї дотичної. Нехай $\Delta y=\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x)$ – приріст функції $y=f(x)$ в точці x_0, що відповідає приросту Δx незалежної змінної x (рис. 1). Проведемо січну PQ і позначимо через φ кут, утворений цією

Рис. 1

січною з додатним напрямом осі Ox.

З графіка видно, що кутовий коефіцієнт січної PQ дорівнює $tg\varphi=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ Якщо $\Delta x\to 0$, то точка Q прямує до точки P вздовж кривої $y=f(x)$, а січна PQ, повертаючись навколо точки Q, переходить в дотичну. Кут φ при цьому прямує до деякого граничного значення α. Отже кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює

$$tg\alpha=\lim_{\Delta x\to 0} tg\varphi=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Означення. Відношення $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ приросту Δf функції $y=f(x)$ до приросту Δx незалежної змінної х називається *диференціальним відношенням*:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad (1)$$

Означення. Якщо відношення $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ має границю при $\Delta x\to 0$, то ця границя називається *похідною функції f в точці* x_0 і позначається $f'(x_0)$ (читається “f штрих від x_0”).

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad (2).$$

Алгоритм знаходження похідної функції за означенням.

1) Надати приріст Δx аргументу x.
2) Знайти приріст функції Δf, що відповідає приросту аргументу Δx.
3) Знайти границю відношення $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$.

Приклад 1. Знайти похідну функції *y=4x-5* за означенням.

Розв'язання.

За означенням $y' = \lim\limits_{\Delta \to x} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Знайдемо $\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x)$. отже,

$\Delta y = 4(x + \Delta x - 5 - (4x - 5) = 4x + 4 \cdot \Delta x - 5 - 4x + 5 = 4 \cdot \Delta x$.

Тому $y'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{4 \cdot \Delta x}{\Delta x} = 4$.

Відповідь: 4.

2. Геометричний і механічний зміст похідної.

Джерелом диференціального числення стали, як відомо, два питання:

1) про відшукання швидкості в разі довільного закону руху;

2) про відшукання дотичної до довільної лінії.

Обидва вони привели до однієї й тієї самої обчислювальної задачі, яку було покладено в основу диференціального числення. *Ця задача полягає в тому, щоб за даною функцією f(x) відшукати іншу функцію f'(x), яка дістала назву похідної і являє собою швидкість зміни функції f(x) щодо зміни аргументу.*

Геометричний зміст похідної.

Сформулюємо розглянуту задачу мовою геометрії.

Нехай дано функцію $y=f(x)$, графік якої наведено на рис. 1. . Відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (див. рис.1) є тангенсом кута нахилу січної до осі *Ox*. При

$\Delta x \to 0$ січна прямує до дотичної в точці P. Тангенсом кута α нахилу дотичної до додатного напрямку осі Ox при цьому буде границя відношення

$$\mathrm{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Значення похідної в деякій точці** x_0 **дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції y=f(x).

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \mathrm{tg}\alpha = k \qquad (3)$$

Механічний (фізичний) зміст похідної.

У механіці відповідна задача формулюється так: знайти *швидкість* тіла, що рухається за законом $s = f(t)$, у деякий момент часу t. Вважаємо, що відстань S і час t – фізичні величини, які можна вимірювати.

Нехай за час від t до $t + \Delta t$ тіло пройшло шлях $s + \Delta s = f(t + \Delta t)$. Тоді

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t).$$

Означення. *Середня швидкість тіла*, що рухається вздовж деякої лінії, визначається за формулою

$$v_{\text{сер}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Щоб знайти миттєву швидкість v такого тіла, потрібно перейти до границі відношення $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$.

Означення. Миттєвою швидкістю тіла, що рухається вздовж лінії $s=f(t)$, називається похідна функції $s = f(t)$ за часом t:

$$\upsilon(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = s'(t). \qquad (4)$$

Приклад 2. Нехай $s = \frac{1}{2} g t^2$ – рівняння вільного руху тіла, g – прискорення його вільного падіння. Знайти миттєву швидкість тіла в будь-який момент часу; у момент часу t = 2 с.

Розв’язання.

За означенням маємо

$$v=\left(\frac{1}{2}gt^2\right)'=\frac{1}{2}g\cdot 2t=gt.$$

Зокрема, якщо t=2, дістаємо:

$$v=g\cdot 2=9{,}8\cdot 2=19{,}6\ \text{м/с}.$$

3. Правила диференціювання функцій.

Позначимо $u(x_0)=u,\quad v(x_0)=v,\quad u'(x_0)=u',\quad v'(x_0)=v'$.

Правило 1. *Похідна сталої дорівнює нулю, тобто якщо y=C, де C=const, то* $y'=0$.

Правило 2. *Якщо функції u і v диференційовані в точці x_0 , то їх сума (різниця) диференційована в цій точці*

Коротко. *Похідна алгебраїчної суми скінченної кількості диференційовних функцій дорівнює алгебраїчній сумі похідних цих функцій:*

$$(u(x)\pm v(x))'=u'(x)\pm v'(x),\ \textit{або}\ \ (u\pm v)'=u'\pm v'. \qquad (5)$$

Правило 3. *Якщо функції u і v диференційовані в точці x_0 , то їхній добуток диференційований у цій точці і*

$$(uv)'=u'v+uv'. \qquad (6)$$

Похідна добутку двох диференційовних функцій дорівнює добутку першого множника на похідну другого плюс добуток другого множника на похідну першого.

Наслідок. *Сталий множник можна виносити за знак похідної:*

$$(Cu)'=Cu'. \qquad (7)$$

Правило 4. *Якщо функції u і v диференційовані в точці x_0 і функція* $v\neq 0$ *в цій точці , то їх частка* $\frac{u}{v}$ *також диференційована в точці x_0 і*

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}. \qquad (8)$$

Якщо чисельник і знаменник дробу диференційовні функції (знаменник не перетворюється в нуль), то похідна дробу також дорівнює дробу, *чисельник якого є різницею добутків знаменника на похідну чисельника і чисельника на похідну знаменника, а знаменник є квадратом знаменника початкового дробу***.**

Зауваження. Похідну від функції $y=\frac{u(x)}{c}$, де $c=\text{const}$, зручно обчислювати як похідну від добутку сталої величини $\frac{1}{c}$ на функцію $u(x)$:

$$\left(\frac{u(x)}{c}\right)'=\left(\frac{1}{c}u(x)\right)'=\frac{1}{c}u'(x).$$

Правило 5 (Похідна складеної функції).

Нехай $y=f(u)$, де $u=g(x)$, тобто $y=f(g(x))$. Функція $f(u)$ називається *зовнішньою*, а функція $g(x)$ – *внутрішньою*, або *проміжним аргументом*.

Якщо функція $f(x)$ *диференційована в точці* x_0 *і функція* g *- похідну в точці* $y_0=f(x_0)$, *то складена функція* $h(x)=g(f(x))$ *також має похідну в точці* x_0, *причому*

$$h'(x_0)=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0) \qquad (9)$$

Похідна складної функції дорівнює добутку похідної зовнішньої функції за проміжним аргументом на похідну проміжного аргументу за незалежною змінною.

Правило 6. (Похідна оберненої функції.) *Якщо функція y=f(x) монотонна й має в точці x відмінну від нуля похідну, то функція, обернена до даної, подається у вигляді x=g(y) і має похідну x=g(y), обернену до похідної даної функції:*

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)}. \qquad (10)$$

Правило 7. (Похідна функції заданої неявно). Якщо функція $y=f(x)$ задана рівнянням $F(x,y)=0$, не розв'язним відносно *y*, то *для знаходження похідної цієї функції достатньо продиференціювати обидві частини рівняння, розглядаючи y як функцію від x, а потім зі здобутого рівняння знайти похідну* y'.

$$y_x' = -\frac{F_x'}{F_y'}. \qquad (11)$$

Правило 8. (Похідна функції заданої параметрично). *Якщо функція* $y = f(x)$ *задана параметрично рівняннями* $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, *тоді її похідна знаходиться за формулою*

$$y_x' = -\frac{y_t'}{x_t'}, \text{ де } t \text{ - параметр.} \qquad (12)$$

4.Таблиця похідних.

1. $C'=0$
2. $x'=1$
3. $(u^n)' = nu^{n-1}u'$
4. $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
5. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$
6. $(e^u)' = e^u \cdot u'$
7. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
8. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$
9. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
10. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
11. $(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
12. $(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
13. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
14. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
15. $(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
16. $(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

де u диференційована функція від x, а C – постійна величина.

Приклад 2. Знайти похідні функцій:

$$y = x^3 \cdot \sqrt{x}, \; f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}, \; y = \sqrt[3]{(6x^5 - 12x^3 - x + 1)^2}.$$

Розв’язання.

1) $y = x^3 \cdot \sqrt{x}$

За формулою $y^{/}(x) = (x^n)^{/} = nx^{n-1}$знайдемо похідну:

$$y = x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{7}{2}}, \text{ тоді } y^{/}(x) = (x^{\frac{7}{2}})^{/} = \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}-1} = \frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}} = \frac{7}{2}\sqrt{x^5}.$$

2) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

Диференціюємо функцію за формулами $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, $\left(u^n\right)' = nu^{n-1} \cdot u'$

$$f'(x) = \frac{\left(x^2\right)'\left(x\ \ -1\right) - x^2\left(x^2 - 1\right)'}{\left(x^2 - 1\right)^2} = \frac{2x\left(x\ \ -1\right) - x^2 \cdot 2x}{\left(x\ \ -1\right)^2} = \frac{2x\left(x\ \ -1 - x^2\right)}{\left(x\ \ -1\right)^2} = -\frac{2x}{\left(x\ \ -1\right)^2}$$

3) $y = \sqrt[3]{\left(6x^5 - 12x^3 - x + 1\right)^2}$

Диференціюємо функцію за формулою $\left(u^n\right)' = nu^{n-1} \cdot u'$

$$y' = \left(\sqrt[3]{\left(6x^5 - 12x^3 - x + 1\right)^2}\right)' = \left(\left(6x^5 - 12x^3 - x + 1\right)^{\frac{2}{3}}\right)' =$$

$$= \frac{2}{3}\left(6x^5 - 12x^3 - x + 1\right)^{\frac{2}{3}-1} \cdot \left(6x^5 - 12x^3 - x + 1\right)' = \frac{2}{3}\left(6x^5 - 12x^3 - x + 1\right)^{-\frac{1}{3}} \times$$

$$\times \left(30x^4 - 36x^2 - 1\right) = \frac{2}{3\sqrt[3]{6x^5 - 12x^3 - x + 1}}\left(30x^4 - 36x^2 - 1\right)$$

5. Поняття диференціалу функції, його геометричний зміст. Властивості диференціала.

Поняття диференціала тісно пов’язане з поняттям похідної, і є одним з найважливіших в математиці. Диференціал наближено дорівнює приросту функції і пропорційний приросту аргументу. Внаслідок цього диференціал широко застосовується при дослідженні різноманітних процесів і явищ.

Термін “***диференціал***” (від лат. *Differentia* - різниця) ввів Лейбніц.

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в точці $x \in [a;b]$, т/б в цій точці має похідну $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Тоді з властивості нескінченно малих $\left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x), \right)$ *де* $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ маємо:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha, \quad \alpha \to 0 \quad \textit{при} \quad \Delta x \to 0,$$

звідки

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x = f'(x)\Delta x. \qquad (13)$$

Означення. *Диференціалом* dy *функції* $y = f(x)$ *в точці* x називається головна, лінійна відносно Δx, частина приросту функції $f(x)$ в цій точці:

$$dy = f'(x)\Delta x. \qquad (14)$$

Якщо $y=x$, то $dy = dx = \Delta x$. Тому

$$dy = f'(x)dx. \qquad (15)$$

Ця формула дає змогу розглядати похідну функції як відношення диференціала функції до диференціала незалежної змінної.

Геометричний зміст диференціала. Диференціал $df(x)$ є *лінійним наближенням (апроксимацією) до приросту* функції: $\Delta f(x) \approx df(x)$. Наскільки менше $|\Delta x|$, настільки краще наближення (апроксимація) (рис.2).

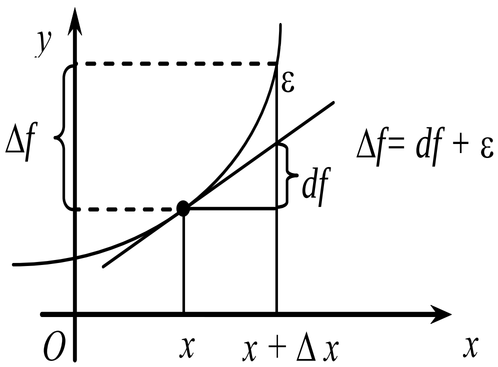


Рис.2

Приклад 3. Знайти диференціал *dy* функції $y = x^2$:

1) при довільних значеннях *x* та Δx;

2) при *x* = 20, Δx = 0,1.

Розв'язання.

1) $dy = \left(x^2\right)' \Delta x = 2x\Delta x$;

2) якщо *x* = 20, Δx = 0,1, то $dy = 2 \cdot 20 \cdot 0{,}1 = 4$.

Приклад 4. Знайти диференціал *dy* функції $y = x^2 \operatorname{tg}(3x+1)$.

Розв'язання.

Оскільки $y' = 2x\mathrm{tg}(3x+1) + \frac{3x^2}{\cos^2(3x+1)}$, то за формулою (3) дістанемо

$$dy = \left(2x\mathrm{tg}(3x+1) + \frac{3x^2}{\cos^2(3x+1)}\right)dx.$$

Диференціал функції є також функцією незалежної змінної, а тому його можна диференціювати. Розглянемо функцію $y = f(x)$.

Означення. *Другим диференціалом функції* $y=f(x)$ називається вираз $d(dy)$ і позначається

$$d^2y = d(dy). \qquad (16)$$

Аналогічно дістаємо третій диференціал $d[d^2y] = d^3y$ і т. д. до диференціала n-го порядку d^ny.

Властивості диференціала.

1. $d(Cu) = Cdu$

2. $d(u \pm v) = du \pm dv$

3. $d(uv) = vdu + udv$

4. $d\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vdu - udv}{v^2}$

5. Якщо $y = F(x) = f(\varphi(x))$; $\varphi(x) = u$, $y = f(u)$, *то* $\varphi'(x)dx = du$.

$$\underline{dy} = f'(u)\cdot\varphi'(x)dx = \underline{f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx}$$

$$df(u) = f'(u)du.$$

6. Якщо $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, *то*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

7. Якщо функція $y = f(x)$ *має обернену* $x = f^{-1}(y)$, *то*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

8. Якщо функції задані у параметричному вигляді $y = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, *то*

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}.$$

Теорема 1. (інваріантність форми диференціала) *Форма диференціала не залежить від того, чи є аргумент незалежною змінною або функцією.*

Приклад 5. Знайти диференціал функції $y=\frac{x+3}{x^2+3}$.

Розв'язання.

Скористаємось 4 властивістю диференціала функції та таблицею похідних:

$$dy=d\left(\frac{x+3}{x^2+3}\right)=\frac{(x^2+3)d(x+3)-(x+3)d(x^2+3)}{(x^2+3)^2}=$$

$$=\frac{(x^2+3)dx-(x+3)2xdx}{(x^2+3)^2}=\frac{(3-6x-x^2)dx}{(x^2+3)^2}.$$

6. Застосування диференціалу до наближених обчислень.

Застосування диференціалу до наближених обчислень ґрунтується на тому, що $\Delta y\approx dy$ для малих значень приросту аргументу.

Крім того, оскільки

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0),\text{ то } f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+dy. \quad (7)$$

Приклад 6. Обчислити наближено $arctg\ 1{,}05$.

Розв'язання.

Нехай $f(x)=arctg\ x$, тоді за формулою наближених обчислень маємо:

$$arctg\,(x_0+\Delta x)\approx arctg\,x_0+(arctg\,x)'\Delta x,$$

$$arctg\,(x_0+\Delta x)\approx arctg\,x_0+\frac{\Delta x}{1+x^2}.$$

Якщо x=1, $\Delta x=0{,}05$, то $arctg 1{,}05\approx arctg 1+\frac{0{,}05}{2}=\frac{\pi}{4}+0{,}025\approx 0{,}811$.

Приклад 7. Знайти наближене значення $\sqrt[10]{1030}$.

Розв'язання.

Виберемо функцію таку, щоб даний числовий вираз був значенням цієї функції для деякого значення аргументу.

Очевидно, що в цьому прикладі такою функцією є $y = \sqrt[10]{x}$. Тоді $\sqrt[10]{1030} = f(1030)$.

Знайдемо таке значення аргументу x_0, яке було б близьке до даного і для якого значення функції легко обчислюється. В даному прикладі візьмемо x_0=1024, оскільки

$$f(1024) = \sqrt[10]{1024} = 2.$$

Тоді $x_0+\Delta x$=1030 і Δx=6.

За формулою наближених обчислень маємо:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + dy$$

$$f(1030) \approx f(1024) + dy, \text{ де } dy = f'(x)\Delta x = \frac{1}{10\sqrt[10]{x^9}}\Delta x$$

Отже, $\sqrt[10]{1030} \approx \sqrt[10]{1024} + \frac{1}{10\sqrt[10]{1024^9}} \cdot 6 \approx 2 + \frac{6}{10 \cdot 2^9} \approx 2 + 0{,}0012 = 2{,}0012$.

Питання для опитування:

- Які задачі приводять до поняття похідної?
- Що таке приріст функції та приріст аргументу?
- Дайте означення похідної функції?
- В чому полягає геометричний і механічний зміст похідної функції?
- Таблиця найпростіших похідних.

- Сформулюйте правила диференціювання суми, різниці, добутку і частки функцій.
- Сформулюйте правило знаходження похідної складеної функції.
- Як знайти похідні оберненої та заданої неявно функцій?
- Що називається диференціалом функції?
- Як визначається диференціал функції через її похідну?
- Який геометричний та механічний зміст диференціала7
- Сформулювати властивості диференціала.
- Обґрунтуйте формулу для наближеного обчислення значення функції за допомогою диференціала.