Практичне заняття № 1.

Тема: Методи обчислення визначників. Дії над матрицями.

Мета: закріпити отримані теоретичні знання з тем «Визначники», «Матриці», набути навичок і вмінь обчислювати визначники різними методами виконувати дії додавання, віднімання і множення матриць, знаходити ранг матриці, обернену матрицю.

1. **Організаційний момент**
2. **Актуалізація опорних знань:** усне опитування

- Що наз. визначником другого (третього) порядку?
- Сформулюйте основні властивості визначників.
- Що наз. мінором і алгебраїчним доповненням елемента визначника?
- Як обчислюються визначники вищих порядків?
- Сформулюйте теорему про розклад визначника за елементами рядка або стовпця.
- Дайте означення матриці? Що таке визначник матриці?
- Які види матриць ви знаєте?
- Що називається сумою, різницею, множенням матриць?
- Запишіть властивості лінійних дій над матрицями, властивості множення матриць.
- Яка матриця називається оберненою до даної?
- Як знайти обернену матрицю?
- Що таке ранг матриці? Як знаходиться ранг?

3. **Мотивація навчання**: повідомлення теми й мети заняття

4. **Розв’язування вправ.**

План практичного заняття

1. **Обчислення визначників II та III порядків за правилом прямокутника, трикутника.**
2. **Обчислення визначників третього і вищих порядків методом розкладу визначника за елементами рядка або стовпця.**
3. **Додавання, віднімання, множення матриць.**
4. **Знаходження оберненої матриці.**
5. **Знаходження рангу матриці.**

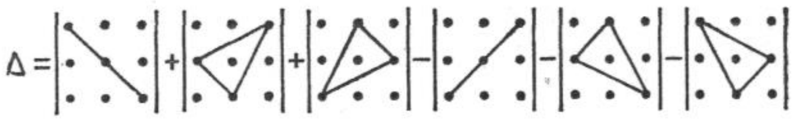
Термінологічний словник ключових понять

Визначник другого порядку – це вираз $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$;

Визначник третього порядку **–** це вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Правило трикутників **–**



Мінор M_{ij} ***елемента*** a_{ij} ***визначника*** – це визначник, який утворюється з даного визначника в результаті викреслювання *i*-го рядка та *j*-го стовпця.

Алгебраїчне доповнення A_{ij} ***елемента*** a_{ij} – це його мінор, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто $A_{ij}=(-1)^{i+j} M_{ij}$

Розклад визначника за елементами відповідного рядка або стовпця: Визначник дорівнює сумі добутків елементів якого-небудь рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення.

Матриця розмірності m x n – *це* таблиця чисел, що містить *m* рядків і *n* стовпців виду

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Квадратна матриця **–** це матриця у якої $m = n$.

Діагональна матриця – це квадратна матриця, в якої всі елементи, що не належать головній діагоналі, дорівнюють нулю.

Одинична матриця – це діагональна матриця, в якої всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці.

Транспонована матриця – це матриця рядки і стовпці якої поміняні місцями.

Ранг матриці А – це найбільший порядок відмінного від нуля її мінора. Ранг матриці А прийнято позначати *Rg(A)* або *rang A*.

Матриця не особлива, якщо визначник цієї матриці відмінний від нуля.

Обернена матриця до матриці А – це матриця A^{-1}., *якщо* $A\cdot A^{-1}=E$

Обернена матриця знаходиться за формулою:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

де $\det A$- визначник матриці A, A_{ij} - алгебраїчні доповнення всіх елементів a_{ij} матриці А.

Завдання для практичного виконання:

Приклад 1.Знайти визначники другого порядку:

Розв’язання.

1) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 5\cdot 3 - 7\cdot 2 = 1;$

2) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab;$

3) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix} = \sin\alpha\sin\alpha - \sin\beta\sin\beta = \sin(\alpha-\beta);$

4) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix} = 1 - \log_b a \log_a b = 0$.

Приклад 2. Знайти визначники третього порядку:

Розв'язання.

1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot3\cdot3 + 5\cdot4\cdot3 + 1\cdot1\cdot2 - 3\cdot3\cdot1 - 2\cdot2\cdot4 - 5\cdot1\cdot3 = 40$;

2) $\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix} = abc + x^3 + x^3 - bx^2 - ax^2 - cx^2 = 2x^3 - (a+b+c)x^2 + abc$;

3) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\gamma + \sin\gamma\cos\alpha - \sin\gamma\cos\beta - \sin\alpha\cos\gamma -$

$-\sin\beta\cos\alpha = \sin(\alpha-\beta) + \sin(\beta-\gamma) + \sin(\gamma-\alpha)$.

Приклад 3. Обчислити визначник четвертого порядку:

Розв'язання.

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -6 & -14 & 5 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -7 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -6 & -14 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \\ 0 & -7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -14 & 5 \\ 7 & -2 & 4 \\ 2 & -7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -14 & 5 \\ 0 & -100 & 39 \\ 0 & -35 & 12 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+1}\cdot(-1)\begin{vmatrix} -100 & 39 \\ -35 & 12 \end{vmatrix} = -165.$$

Для утворення нулів у рядку або стовпчику зручно мати розв'язувальний елемент, що дорівнює одиниці. Даний визначник такого елемента не має. Для його утворення можна, наприклад, помножити останній рядок визначника на –1 і додати до передостаннього, при цьому визначник не зміниться. У такий спосіб у третьому рядку утворилися три одиниці (достатньо мати одну). Для утворення нулів, наприклад у третьому рядку, можна взяти за розв'язувальний елемент одиницю, що стоїть на перетині першого стовпчика і третього рядка.

Помножимо елементи першого стовпчика спочатку на –1 і складемо з відповідними елементами другого стовпчика, тоді на місці елемента (3, 2) утвориться нуль. Далі множимо всі елементи того ж першого стовпчика на –3 і складаємо з елементами третього стовпчика. На місці елемента (3, 3) знову утворився нуль. У такий же спосіб, помноживши перший стовпчик на –1 і склавши з останнім, на місці елемента (3, 4) також утвориться нуль. Слід зазначити, що для утворення нулів у рядку працюють з елементами стовпчиків, а для утворення нулів у стовпчиках — з елементами рядків.

Далі, використовуючи теорему Лапласа, розкладаємо визначник 4-го порядку за елементами третього рядка і одержуємо визначник третього порядку. Для його знаходження можна застосувати відповідне правило, але ми ще раз утворимо нулі.

Для одержання одиниці до елементів першого стовпчика додамо відповідні елементи третього стовпчика. На місці елемента (1, 1) утворилася –1. Далі помножимо елементи першого рядка на 7 і складемо з відповідними елементами другого рядка, одержимо нуль на місці елемента (2, 1). Аналогічно, помноживши елементи першого рядка на 2 і склавши з елементами третього рядка, одержимо нуль на місці елемента (3, 1). Після застосування теореми Лапласа одержуємо визначник другого порядку і остаточний результат.

Приклад 4. Використовуючи властивості визначників, обчислити визначники:

1. $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$. **2.** $\begin{vmatrix} x & x_1 & ax+bx_1 \\ y & y_1 & ay+by_1 \\ z & z_1 & az+bz_1 \end{vmatrix}$. **3.** $\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}$.

Приклад 5. Розкладаючи за третім рядком, обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Приклад 6. Розкладаючи за другим стовпчиком, обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}.$$

Приклад 7. Виконати дії над матрицями: A+B, A-B, 2A, 3B, 5B-2A, 3A+4B, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Приклад 8. Знайти добутки матриць:

1. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. 3. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Приклад 9. Знайти обернені до таких матриць:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$. **3.** $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Розв'язання.

Обернена матриця знаходиться за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

де det*A*- визначник матриці *A*, A_{ij} - алгебраїчні доповнення всіх елементів a_{ij} матриці А.

Обчислимо визначник матриці А:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 24 - 8 + 12 + 6 + 24 = 1$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення A_{ij} всіх елементів a_{ij} матриці А за формулою $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, де M_{ij} – мінор елемента a_{ij} матриці А, тобто визначник на одиницю меншого порядку, утворений з визначника матриці викреслюванням i-го рядка та j-го стовпця.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 6 = -3 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 8 & -6 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -(-24 + 24) = 0$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 8 - 12 = -4 \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -(-3 + 1) = 2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 4) = 3$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -6 + 3 = -3 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} = -(-6 + 8) = -2$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 8 = -5$$

Підставивши в формулу отримані алгебраїчні доповнення і значення визначника матриці А, отримаємо обернену матрицю

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -4 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -4 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$

.

Приклад 10. Знайти ранг матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Оскільки не всі елементи матриці А нульові, то *rangA*≥1. Розглянемо мінор другого порядку $M_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 4 = -8$. Так як один з мінорів другого порядку відмінний від нуля, то *rangA*≥2.

Розглянемо мінор третього порядку, який є також визначником матриці А.

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, так як елементи третього рядка – нулі.

Оскільки мінор третього порядку матриці А є єдиним і дорівнює нулю, то *rangA*=2.

5. Самостійна робота.

I варіант

1. Обчислити визначники:

1. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}$. 2. $\begin{vmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{vmatrix}$. 3. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$. 4. $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$.

2. Виконати дії над матрицями: A+B, B-A, 3A+5B, AB, BA, якщо $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

II варіант

1. Обчислити визначники:

1. $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix}$. 2. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$. 3. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$. 4. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$.

2. Виконати дії над матрицями: A+B, B-A, 3A+5B, AB, BA, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Підведення підсумків заняття.

7. Домашнє завдання:

Бубняк Т.І. Вища математика: Навч.посібник. – Львів.,2004. – стор. 25-26, Завдання 1 (12), Завдання 2(1,2,3,4).