Практичне заняття № 10.

Тема: Дослідження функцій та побудова графіків.

Мета: узагальнити та систематизувати теоретичні знання з теми «Похідна функції та її застосування», набути навички і вміння проводити повне дослідження функції за допомогою похідної та навчитися будувати графіки функцій.

1. **Організаційний момент**
2. **Актуалізація опорних знань:** усне опитування

- Дайте означення області визначення функції.
- Яка функція називається парною (непарною)?
- Як дослідити функцію на парність (непарність)?
- Яка функція називається періодичною?
- Що таке нулі функції?
- Яка функція називається зростаючою (спадною) на проміжку?
- Як знайти проміжки зростання (спадання) функції?
- Що називається екстремумом функції? Сформулюйте правило дослідження функції на екстремум.
- Яка крива називається опуклою (вгнутою) на інтервалі?
- Дайте означення точок перегину.
- Сформулюйте правило знаходження інтервалів опуклості, вгнутості та точок перегину.
- Які види асимптот графіка ви знаєте? Як їх знайти?

3. **Мотивація навчання**: повідомлення теми й мети заняття
4. **Розв'язування вправ.**

План практичного заняття

1. **Дослідження функції за допомогою похідної**
2. **Побудова графіків функцій за проведеним дослідженням**

Термінологічний словник ключових понять

Функція – це така відповідність між множинами D та E, при якій кожному значенню змінної $x \in D$ відповідає одне й тільки одне значення $y \in E$.

Область визначення функції – це множина всіх значень аргументу, для яких можна обчислити значення функції.

Екстремуми функції – а) При значенні x_1 аргументу x функція $f(x)$ має максимум $f(x_1)$, якщо в деякому околі точки x_1 виконується нерівність $f(x_1) > f(x)$ $(x \neq x_1)$. б) При значенні x_2 аргументу x функція $f(x)$ має мінімум $f(x_2)$, якщо в деякому околі точки x_2 виконується нерівність $f(x_2) < f(x)$ $(x \neq x_2)$. Максимум або мінімум функції називається екстремумом функції.

Опуклість та вгнутість кривої – крива на проміжку називається опуклою (угнутою), якщо всі точки кривої лежать нижче (вище) від будь-якої її дотичної на цьому проміжку.

Точка перегину – точка, яка відокремлює опуклу частину кривої від вгнутої.

Асимптота кривої – пряма , якщо відстань від змінної точки M кривої до цієї прямої при віддаленні точки M у нескінченність прямує до нуля.

Загальна схема дослідження функції за допомогою похідної.

1. Знайти область визначення функції.
2. З'ясувати , чи є функція парною, непарною, періодичною.
3. Знайти нулі функції, т/б точки перетину графіка функції з осями координат, (якщо це не важко).
4. Дослідити функцію на неперервність, знайти точки розриву функції, якщо вони існують, і знайти односторонні границі в точках розриву.
5. Знайти проміжки монотонності функції.
6. Знайти екстремуми функції.
7. Знайти проміжки опуклості графіка функції і точки перегину.

8. Знайти асимптоти графіка функції, якщо вони існують.

9. Побудувати графік, використовуючи знайдені результати дослідження.

Завдання для практичного виконання:

Приклад 1. Дослідити функцію $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ і побудувати її графік.

Розв'язання.

1. Знаходимо область визначення функції. Функція існує при всіх значеннях x за винятком значення $x = 1$. Звідси її область визначення $\{-\infty<x<1;\ 1<x<+\infty\}$.

2. Дослідимо функцію на парність та непарність. Підставивши замість значень x значення $(-x)$, отримаємо:

$$y(-x)=\frac{2(-x)-1}{(-x-1)^2}=-\frac{2x+1}{(x+1)^2}\neq y(x)\neq -y(x)$$

Отже, функція ні парна, ні непарна. Дана функція не є періодичною.

3. Знаходимо точки перетину графіка функції з осями координат: з віссю Ox: $y = 0$, $\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}=0,\ 2x-1=0,\ x=\dfrac{1}{2},\ \left(\dfrac{1}{2};\ 0\right)$; з віссю Oy: $x = 0$, $y=\dfrac{-1}{1}=-1,\ (0;\ -1)$.

4. Точка $x = 1$ є точкою розриву функції. Дослідимо її характер:

$$\lim_{x\to 1\pm 0} y=\lim_{x\to 1\pm 0}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 1\pm 0}(x-1)^2}=+\infty.$$

Як ліворуч, так і праворуч точки $x = 1$ маємо нескінченний розрив.

Точка $x = 1$ – точка розриву другого роду.

5-6. Знаходимо точки екстремуму та інтервали зростання і спадання функції, результати заносимо у табл. 1:

$$y'=\frac{2(x-1)^2-2(x-1)(2x-1)}{(x-1)^4}=-\frac{2x}{(x-1)^3};\ y'=0\Rightarrow$$

$$-2x=0\Rightarrow x=0 \text{ – критична точка.}$$

При $x=1$ y' не існує, але у цій точці сама функція теж не існує. Дослідимо критичну точку $x = 0$ на екстремум:

при $x=-1$ $y'=\dfrac{2}{-8}=-\dfrac{1}{4}<0(-)$;

при $x=\dfrac{1}{2}$ $y'=\dfrac{-1}{-1/8}=8>0(+)$.

Таблиця 1

x	$(-\infty,0)$	0	(0, 1)	1	$(1,+\infty)$
y'	–	0	+	Не існує	–
y	$\searrow$	$y_{\min}$ (–1)	$\nearrow$	Не існує	$\searrow$

Проходячи через критичну точку зліва направо, похідна змінює знак з «–» на «+», через це в точці x = 0 функція має мінімум:

$$y_{\min}=\frac{-1}{1}=-1.$$

У точці x = 1 функція не визначена. При $1<x<+\infty$ $y'(x)<0$, отже, функція на цьому інтервалі спадає.

7. Точки перегину та інтервали опуклості й вгнутості графіка функції знаходимо за допомогою другої похідної:

$$y''=\frac{-2(x-1)^3+6x(x-1)^2}{(x-1)^6}=\frac{2(2x+1)}{(x-1)^4}; \quad y''=0\Rightarrow$$

$$2(2x+1)=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2};$$

при x = 1 y'' не існує, але в цій точці не існує і сама функція.

Дослідимо точку $x=-\dfrac{1}{2}$:

при $x=-1$ $y''=\dfrac{2(-2+1)}{(-2)^4}=-\dfrac{1}{8}<0\,(-)$;

при $x=0$ $y''=\dfrac{2}{1}=2>0\,(+)$.

Друга похідна, проходячи через $x=-\dfrac{1}{2}$, змінює знак, отже, точка перетину кривої з цією абсцисою є точкою перегину.

Знайдемо її ординату:

$$y=\frac{2\left(-\frac{1}{2}\right)-1}{\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2}=-\frac{8}{9}\approx-0{,}9.$$

Таким чином, точка $\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{8}{9}\right)$ – точка перегину.

У точці $x = 1$ функція не визначена. При $1 < x < +\infty$ $y'' > 0$, значить, графік функції вгнутий.

Результати дослідження заносимо у табл. 2.

Таблиця 2

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$	1	$(1, +\infty)$
y''	+	0	+	Не існує	+
y	$\cap$	Перегин (– 8/9)	$\cup$	Не існує	$\cup$

8. Вертикальні асимптоти. Пряма $x = 1$ є вертикальною асимптотою.

Рівняння похилої асимптоти знаходимо у вигляді $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-1}{x(x-1)^2} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0.$$

Таким чином, похилою асимптотою є $y = 0$ (вісь Ox).

На підставі результатів дослідження будуємо графік функції. Для точнішої побудови візьмемо додатково точки на рис. 1:

(–5; – 0,3), $\left(\frac{2}{3},\ 3\right)$, (2; 3), (3; 1,3).

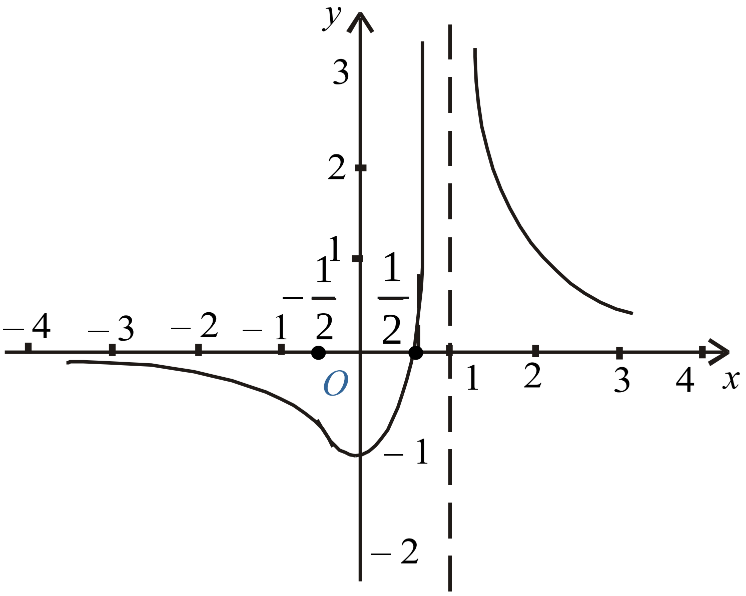


Рис. 1

Приклад 2. Дослідити засобами диференціального числення функцію $y = f(x)$ і побудувати її графік.

$$y = -4 \cdot \frac{(x+2)^2}{x^2+4}$$

Розв'язання.

1. Дана функція є дробово-раціональною. Вона визначена на всій множині дійсних чисел, оскільки знаменник в нуль не обертається, тобто $D(y) = (-\infty; \infty)$.

2. Дослідимо функцію на парність та непарність. Підставивши замість значень *x* значення (-*x*), отримаємо:

$$y(-x) = -4 \cdot \frac{((-x)+2)^2}{(-x)^2+4} = -4 \cdot \frac{(-x+2)^2}{x^2+4} \neq y(x) \neq -y(x)$$

Отже, функція ні парна, ні непарна. Дана функція не є періодичною.

3. Знайдемо точки перетину графіка функції з осями координат.

$$y = -4 \cdot \frac{(x+2)^2}{x^2+4}.$$

Знайдемо точки перетину графіка функції з віссю абсцис.

y=0, тобто $-4 \cdot \frac{(x+2)^2}{x^2+4} = 0 \Rightarrow (x+2)^2 = 0 \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2.$

Отже графік функції перетинає вісь *Ox* в точці А(-2;0).

Знайдемо точки перетину графіка функції з віссю ординат.

x=0, тоді $y = -4 \cdot \frac{(0+2)^2}{0^2+4} = -4 \cdot \frac{4}{4} = -4.$

Отже, графік функції перетинає вісь *Oy* в точці В(0;-4).

4. В області визначення дана функція є неперервною, тобто дана функція неперервна на всій числовій прямій.

5. Дослідимо функцію на монотонність. Інтервали монотонності відокремлюються точками екстремуму та точками розриву функції.

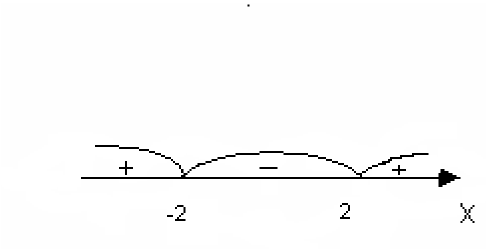
Знаходимо похідну заданої функції:

$$y' = \left(-4 \cdot \frac{(x+2)^2}{x^2+4}\right)' = -4 \cdot \frac{2(x+2)\cdot 1 \cdot (x^2+4) - (x+2)^2 \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = -4 \cdot \frac{2(x+2)(x^2+4-x^2-2x)}{(x^2+4)^2} =$$

$$= \frac{-16(x+2)(2-x)}{(x^2+4)^2}$$

Знаходимо критичні точки функції:

$$\frac{-16(x+2)(2-x)}{\left(x^2+4\right)^2}=0 \Rightarrow (x+2)(2-x)=0 \Rightarrow x_1=-2,\ x_2=2.$$



Отримані дві критичні точки функції розбивають область визначення функції на проміжки. З'ясуємо знак похідної на кожному проміжку: похідна додатня на інтервалах (-∞;-2), (2;+∞), і від'ємна на інтервалі (-2;2).

Отже, функція зростає на інтервалах (-∞;-2), (;+∞) і спадає на інтервалі (-2;2).

6. Знайдемо екстремуми функції. Оскільки при переході через критичну точку x=2, похідна функції змінює знак з мінуса на плюс, то точка x=2 є точкою мінімуму функції. Знайдемо мінімум функції:

$$y_{\min}=f(2)=-4\cdot\frac{(2+2)^2}{(2)^2+4}=-4\cdot\frac{16}{8}=-8.$$

Оскільки, при переході через критичну точку x=-2, похідна функції змінює знак з плюса на мінус, то точка x=-2 є точкою максимуму функції. Знайдемо максимум функції:

$$y_{\max}=f(-2)=-4\cdot\frac{(-2+2)^2}{(-2)^2+4}=0$$

7. Знаходимо інтервали опуклості та вгнутості кривої, що є графіком даної функції. Ці інтервали відокремлюються точками, в яких друга похідна дорівнює нулю, і точками розриву функції. Знайдемо похідну другого порядку і стаціонарні точки. Маємо:

$$y''=\left(\frac{-16(x+2)(2-x)}{\left(x^2+4\right)^2}\right)'=-16\left(\frac{4-x^2}{\left(x^2+4\right)^2}\right)'=-16\cdot\frac{-2x\cdot\left(x^2+4\right)^2-(4-x^2)\cdot 2\left(x^2+4\right)\cdot 2x}{\left(x^2+4\right)^4}=$$

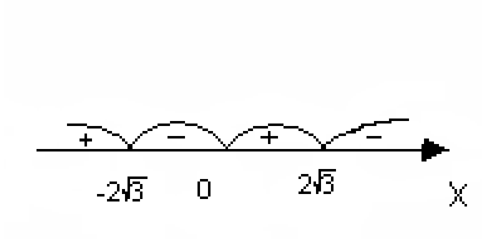
$$=16\cdot 2x\cdot\frac{\left(x^2+4\right)+(4-x^2)\cdot 2}{\left(x^2+4\right)^3}=32x\cdot\frac{\left(x^2+4\right)+8-2x^2}{\left(x^2+4\right)^3}=32x\cdot\frac{12-x^2}{\left(x^2+4\right)^3}$$

$y''=0$

$$\Rightarrow 32x\cdot\frac{12-x^2}{\left(x^2+4\right)^3}=0 \Rightarrow x\cdot\left(12-x^2\right)=0 \Rightarrow x=0 \text{ або } x^2=12 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=2\sqrt{3},\ x_3=-2\sqrt{3}$$

Маємо три стаціонарні точки функції, отже, отримаємо чотири інтервали на яких з'ясуємо знак другої похідної і відповідно інтервали опуклості та вгнутості функції. Дістанемо:

Функція вгнута на інтервалах $\left(-\infty;-2\sqrt{3}\right)\cup\left(0;2\sqrt{3}\right)$, оскільки на цих інтервалах $y''>0$.



Функція опукла на інтервалах $\left(-2\sqrt{3};0\right)\cup\left(2\sqrt{3};\infty\right)$, так як $y''<0$.

Точки $x_1=0,\ x_2=2\sqrt{3},\ x_3=-2\sqrt{3}$ є точками перегину графіка функції.

8. Знаходимо асимптоти кривої.

Вертикальних асимптот функція не має. Шукатимемо похилі та горизонтальні асимптоти у вигляді

$$y=kx+b,\ \text{де}\ \ \mathrm{k}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right).$$

Маємо: $\mathrm{k}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-4(x+2)^2}{x\left(x^2+4\right)}=\infty$

Оскільки знайдена границя дорівнює нескінченності, то задана крива не має похилої та горизонтальної асимптоти.

9. Будуємо графік даної функції, використовуючи результати дослідження (рис. 2).

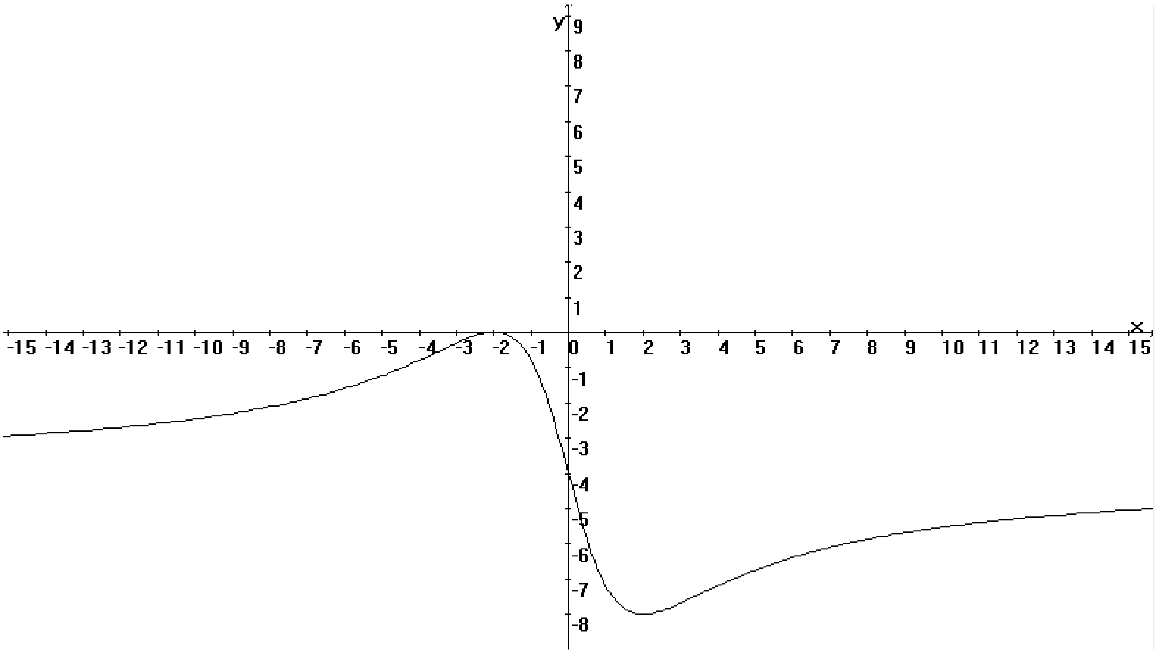


Рис. .2 Графік досліджуваної функції $y=-4\cdot\dfrac{(x+2)^2}{x^2+4}$

**Додатково*

Приклад 3. Дослідити функцію $y=f(x)$ і побудувати її графік $y=\dfrac{x^2}{x-3}$.

5. **Підведення підсумків заняття.**

6. **Домашнє завдання**:

Бубняк Т.І. Вища математика: Навч.посібник. – Львів.,2004. – стор. 98-105, 116 Завдання 5(3,4). Індивідуальні завдання.