Практичне заняття № 11.

Тема: Диференціювання функцій двох змінних.

Мета: узагальнити та систематизувати теоретичні знання з теми «Диференціювання функцій двох змінних», набути навичок і вмінь знаходити границю та неперервність функції двох змінних, обчислювати частинні похідні функції двох змінних.

1. **Організаційний момент**
2. **Актуалізація опорних знань:** усне опитування

- Що називається функцією багатьох змінних, двох змінних?
- Які є способи задання функції багатьох змінних?
- Що називається областю визначення функції і який її геометричний зміст?
- Що являє собою графік функції $z = f(x; y)$?
- Що називається лінією рівня функції $z = f(x; y)$?
- Дати означення границі функції двох змінних в точці.
- Що називається неперервною функцією двох змінних на множині точок?
- Дати означення частинної похідної функції двох змінних по одній з них? З'ясувати її геометричний зміст.
- Як визначають частинні похідні другого порядку від функції двох змінних?
- Сформулювати теорему про рівність других мішаних похідних.
- Дати означення повного диференціала функції двох змінних і вказати формулу для його знаходження.

3. **Мотивація навчання**: повідомлення теми й мети заняття

4. Розв'язування вправ.

План практичного заняття

1. Визначення границі та неперервності функції двох змінних

2. Знаходження частинних похідних функції двох змінних

Термінологічний словник ключових понять

Зв'язна множина — це множина точок, будь-які дві з котрих можна сполучити ламаною так, щоб усі точки ламаної належали цій множині.

Обмежена множина — це множина, яка лежить повністю всередині деякого кола скінченного радіуса.

δ-окіл точки $P_0(x_0; y_0)$ — це множина точок, координати яких задовольняють нерівність $(x-x_0)^2+(y_0-y)^2<\delta^2$.

Внутрішня точка множини — це така точка, для якої існує δ-окіл, усі точки якого належать множині.

Зовнішня точка — це така точка, для якої існує такий δ-окіл, усі точки якого не належать множині.

Область — це множина, для якої виконуються умови:

1) кожна точка множини — внутрішня точка;

2) будь-які дві точки множини можна сполучити ламаною, усі точки якої належать множині.

Межова точка області — це точка, будь-який окіл якої містить точки, які належать і не належать області.

Межа — це сукупність усіх межових точок.

Замкнена область — це множина, до якої приєднані всі її межові точки.

Функція двох змінних $z=f(x;y)$ вважається заданою, якщо кожній точці множини *D*, що належить площині, поставлено у відповідність за деяким законом одне і тільки одне дійсне число $z\in R$.

Границя В функції двох змінних $z=f(x;y)$ при $(x;y)\to(x_0;y_0)$ — це число, що задовольняє нерівність $|f(x;y)-B|<\varepsilon$ при будь-якому $\varepsilon>0$, якщо для нього існує таке δ, що $0<(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2$.

Неперервна функція двох змінних $f(x;y)$ ***у точці*** $(x_0;y_0)$ — це функція, яка визначена на множині $D\in R^2$, і для якої $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x;y)=f(x_0;y_0)$.

Диференційовна функція $z = f(x;y)$ — це функція, повний приріст якої Δz можна подати у вигляді $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$, де A, B — числа, α, β — нескінченно малі при $\alpha,\beta \to 0$.

Повний приріст — це різниця $f(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y) - f(x_0;\ y_0)$, де Δx, Δy — прирости, що надаються точці $(x_0;\ y_0)$ так, щоб точка $(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y)$ не виходила за межі околу точки $(x_0;\ y_0)$.

Повний диференціал функції двох змінних — це головна лінійна частина приросту функції, тобто $A\Delta x + B\Delta y$ або $z'_x\Delta x + z'_y\Delta y$.

Повний диференціал функції двох змінних $z = f(x;y)$ обчислюється за формулою $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$.

Завдання для практичного виконання:

Приклад 1. Знайти область визначення функції $z = \ln\left(4 - x^2 - y^2\right)/\sqrt{4x - y}$ та надати їй геометричну інтерпретацію.

Розв'язання.

1. Знайдемо область визначення функції аналітично

$$D = \left\{(x;y) \in R^2 \middle| 4 - x^2 - y^2 > 0,\quad 4x > y\right\}.$$

2. Нерівності в D замінюємо рівностями і будуємо лінії, що їм відповідають на координатній площині, а саме: $x^2 + y^2 = 4$; $y = 4x$.

3. Визначаємо за допомогою контрольних точок $P_1\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$, $P_2(1;2)$ розміщення D на площині і заштриховуємо її (рис. 1).

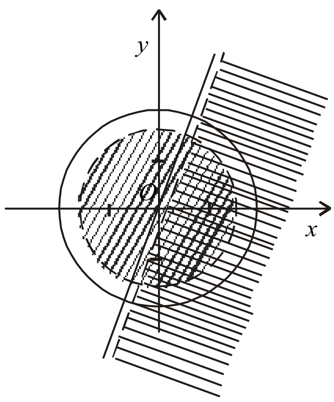


Рис. 1

$$\left.\begin{array}{c}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{9}{4}=\frac{10}{4}<4\\ 4\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{2}>0\end{array}\right\}\Rightarrow P_1\in D$$

$$\left.\begin{array}{c}1^2+2^2=5>4\\ 4>2\end{array}\right\}\Rightarrow P_2\ \overline{\in}\ D.$$

Приклад 2. Знайти область визначення функції двох змінних та надати їй геометричну інтерпретацію:

а) $z=\dfrac{2x+y}{x-y}$;

б) $z=\sqrt[4]{1-x^2-y^2}$;

в) $z=\ln\left(x^2+y^2-4\right)$;

г) $z=\sqrt{\sin\pi\left(x^2+y^2\right)}$.

Розв'язання.

а) $z=\dfrac{2x+y}{x-y}$

Функція невизначена, якщо $x=y$. Геометрично це означає, що область визначення складається із двох напівплощин, одна з яких лежить вище, а друга — нижче від прямої $y=x$ (рис. 2).

б) $z=\sqrt[4]{1-x^2-y^2}$

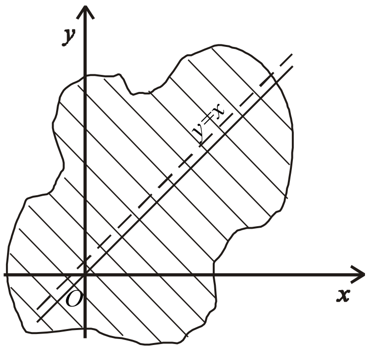
Функція визначена, якщо $1-\left(x^2+y^2\right)\geq 0$, тобто $x^2+y^2\leq 1$. Це є коло з центром (0; 0) та радіусом 1 (рис. 3).

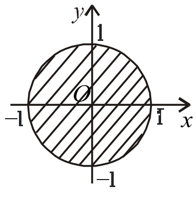
в) $z=\ln\left(x^2+y^2-4\right)$

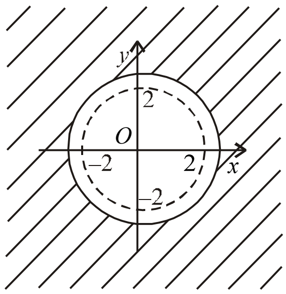
Функція визначена, якщо $x^2+y^2-4>0$, тобто $x^2+y^2>4$ (рис. 4).

г) $z=\sqrt{\sin\pi\left(x^2+y^2\right)}$

Функція визначена, якщо $\sin\pi\left(x^2+y^2\right)\geq 0$, тобто $2n\leq x^2+y^2\leq 2n+1$ $\left(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\right)$ (рис. 5).







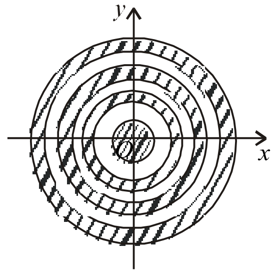


Рис. 2 *Рис. 3* *Рис. 4* *Рис. 5*

Приклад 3. Обчислити $\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} \dfrac{x^2+y^3}{2x-3y}$.

Розв'язання.

Згідно з теоремами про арифметичні операції з границями, а також те, що границя сталої дорівнює сталій, тобто $\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} x=1$, $\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} y=2$, маємо

$$\lim_{(x;y)\to(1;2)} \frac{x^2+y^3}{2x-3y} = \frac{\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)}\left(x^2+y^3\right)}{\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)}(2x-3y)} = \frac{\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} x^2 + \lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} y^3}{\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} 2x - \lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} 3\cdot y} = \frac{1+2^3}{2-3\cdot 2} = -\frac{9}{4}.$$

Приклад 4. Обчислити $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\ln(1+2xy)}{\sin 3xy}$.

Розв'язання.

Візьмемо $xy=t$. Тоді з того, що $(x;y)\to(0;0)$ випливає $t\to 0$ і задану границю можна переписати у вигляді $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+2t)}{\sin 3t}$. При $t\to 0$ маємо $\ln(1+2t)\sim 2t$; $\sin 3t\sim 3t$, тобто $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+2t)}{\sin 3t} = \ = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2t}{3t} = \dfrac{2}{3}$. Таким чином, $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)}\dfrac{(1+2xy)}{\sin 3xy} = \dfrac{2}{3}$.

Приклад 5. Знайти границю функції $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$.

Розв'язання.

Для будь-якого $\varepsilon>0$ існує $\delta>0$ (наприклад, $\delta=\varepsilon$) таке, що для всіх точок $(x;y)$, що задовольняють умову $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ і відрізняються від початку координат, виконується нерівність

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right| = \frac{x^2}{x^2+y^2}|y| \le |y| \le \sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon.$$

Отже, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$.

Приклад 6. Знайти точки розриву функції двох змінних:

1) $u=\dfrac{x^3}{x^2+y^2}$;

2) $u=\dfrac{1}{\sin^2 x+\sin^2 y}$.

Розв'язання.

1. Функція $u = \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}$ у точці $x = 0$, $y = 0$ не існує, тому вона має в цій точці розрив. Знайдемо границю $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}$.

Для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, що для всіх точок $(x;\ y)$, що задовольняють умову $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ і відрізняються від початку координат, виконується нерівність:

$$\left| \frac{x^3}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \frac{x^2}{x^2 + y^2} |x| \le |x| \le \sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon .$$

Отже, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2} = 0$ і функція має в точці (0; 0) розрив.

2. Функція $u = \dfrac{1}{\sin^2 x + \sin^2 y}$ не існує, якщо $\sin^2 x + \sin^2 y = 0$, тобто $x = \pi k$, $y = \pi k_1$. Тому може бути, що вона має розрив. Знайдемо границю $\lim\limits_{\substack{x \to \pi k \\ y \to \pi k_1}} \dfrac{1}{\sin^2 x + \sin^2 y} = +\infty$.

Отже, функція $u = \dfrac{1}{\sin^2 x + \sin^2 y}$ має в точці (0; 0) розрив.

Приклад 7. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ для функції $z = x^3 y + \sin\left(x^2 + \sqrt{y}\right) + \operatorname{tg} x + \ln y$.

Розв'язання.

Знайдемо $\dfrac{\partial z}{\partial x}$. Вважаючи, що $y = \text{const}$, дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y + \cos\left(x^2 + \sqrt{y}\right) \cdot 2x + \frac{1}{\cos^2 x} .$$

При знаходженні $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ вважаємо, що $x = \text{const}$. Дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + \cos\left(x^2 + \sqrt{y}\right) \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{y} .$$

Приклад 8. Знайти z'_x і z'_y для функції $z = x^2 y + x y^2$.

Розв'язання.

Знайдемо z'_x, вважаючи $y = const$:

$$z'_x = 2xy + y^2.$$

Знайдемо z'_y, вважаючи $x = const$:

$$z'_y = x^2 + 2xy.$$

Приклад 9. Знайти повний диференціал для функції $z = \ln(x + \ln y)$.

Розв'язання.

Повний диференціал функції двох змінних знаходиться за формулою

$$dz = z'_x dx + z'_y dy \text{, де}$$

$$z'_x = \frac{1}{x + \ln y}; \quad z'_y = \frac{1}{x + \ln y} \cdot \frac{1}{y}.$$

Отже, $dz = \dfrac{1}{x + \ln y}\left(dx + \dfrac{1}{y}dy\right)$.

Приклад 10. Знайти повний диференціал функції двох змінних:

$$z = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{x-y}.$$

Розв'язання.

Знайдемо $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \left(\frac{x+y}{x-y}\right)'_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \frac{-2y}{(x-y)^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \left(\frac{x+y}{x-y}\right)'_y = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \frac{2x}{(x-y)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Отже, $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy = \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$.

Приклад 11. Знайти частинні похідні першого та другого порядків для заданої функції

$$z = \ln(x + 5y^2)$$

Розв'язання.

Спочатку знайдемо частинні похідні першого порядку для заданої функції

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x+5y^2}\cdot\left(x+5y^2\right)'_x=\frac{1}{x+5y^2}\cdot(1+0)=\frac{1}{x+5y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x+5y^2}\cdot\left(x+5y^2\right)'_y=\frac{1}{x+5y^2}\cdot(0+10y)=\frac{10y}{x+5y^2}.$$

Знайдемо частинні похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(\frac{1}{x+5y^2}\right)'_x=-\frac{1}{\left(x+5y^2\right)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(\frac{1}{x+5y^2}\right)'_y=-\frac{1}{\left(x+5y^2\right)^2}\cdot(1+10y)=-\frac{1+10y}{\left(x+5y^2\right)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\left(\frac{10y}{x+5y^2}\right)'_x=-\frac{10y}{\left(x+5y^2\right)^2}\cdot 1=-\frac{10y}{\left(x+5y^2\right)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{10y}{x+5y^2}\right)'_y=\frac{10\left(x+5y^2\right)-10y\cdot 10y}{\left(x+5y^2\right)^2}=\frac{10x+50y^2-100y^2}{\left(x+5y^2\right)^2}=\frac{10x-50y^2}{\left(x+5y^2\right)^2}.$$

Приклад 12. Перевірити рівність $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ для функції $z=x^2y+y^3$.

Розв’язання.

Знайдемо спочатку частинні похідні першого порядку

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=x^2+3y^2.$$

Знайдемо похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ і порівняємо їх

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=2x+0=2x.$$

Як бачимо $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=2x$.

**Додатково*

Приклад 13. Знайти повний диференціал функції $f(x;\ y)$ у заданій точці, якщо:

1) $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, а задана точка (1; 1); (0; 1);

2) $f(x;y)=\sqrt{xy+\frac{x}{y}}$, а задана точка (2; 1).

5. Підведення підсумків заняття.

6. Домашнє завдання:

Бубняк Т.І. Вища математика: Навч.посібник. – Львів.,2004. – стор. 118-128, Завдання 1(2,4), 2(2,5), 3(2,3). Індивідуальні завдання.