Практичне заняття № 12.

Тема: Знаходження екстремумів функцій двох змінних.

Мета: узагальнити та систематизувати теоретичні знання з теми «Знаходження екстремумів функції двох змінних», набути навичок і вмінь знаходити екстремуми функцій двох змінних.

1. **Організаційний момент**
2. **Актуалізація опорних знань:** усне опитування

- Що називається функцією багатьох змінних, двох змінних?
- Що називається областю визначення функції і який її геометричний зміст?
- Дати означення частинної похідної функції двох змінних по одній з них? З'ясувати її геометричний зміст.
- Як визначають частинні похідні другого порядку від функції двох змінних?
- Що називається точкою максимуму (мінімуму) функції багатьох змінних?
- Сформулювати теорему про необхідні умови локального екстремуму функції багатьох змінних.
- Як формулюється достатня умова існування локального екстремуму функції багатьох змінних?
- Дати означення умовного екстремуму.
- Охарактеризувати метод множників Лагранжа.

3. **Мотивація навчання**: повідомлення теми й мети заняття
4. **Розв'язування вправ.**

План практичного заняття

1. **Розв’язання вправ на знаходження екстремумів функцій двох змінних**
2. **Знаходження умовних екстремумів.**
3. **Розв’язування задач на найбільше та найменше значення**

Термінологічний словник ключових понять

Функція двох змінних $z = f(x; y)$ вважається заданою, якщо кожній точці множини D, що належить площині, поставлено у відповідність за деяким законом одне і тільки одне дійсне число $z \in R$.

Межова точка області — це точка, будь-який окіл якої містить точки, які належать і не належать області.

Межа — це сукупність усіх межових точок.

Безумовний екстремум — це мінімум або максимум функції $z = f(x, y)$.

Якщо для всіх точок (x, y) околу точки $(x_0,\ y_0)$ виконується нерівність $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ $[f(x, y) \geq f(x_0, y_0)]$, тоді ця точка (x_0, y_0) називається точкою *максимуму* (*мінімуму*) функції $z = f(x, y)$.

Умовний екстремум — це екстремум функції $z = f(x, y)$, що досягається за умови, що змінні x і y пов’язані рівнянням $\varphi(x, y) = 0$.

Завдання для практичного виконання:

Приклад 1. Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

$$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b} \quad (a > 0,\ b > 0).$$

Розв’язання.

Спочатку знайдемо критичні точки, тобто точки в яких частинні похідні першого порядку рівні нулю

$$z'_x = \frac{x}{a},\ z'_y = \frac{y}{b} \qquad \begin{cases} \frac{x}{a} = 0 \\ \frac{x}{b} = 0 \end{cases}.$$

Отже, (0; 0) — стаціонарна точка.

Знайдемо частинні похідні другого порядку z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}:

$$z''_{xx} = \frac{1}{a},\ z''_{xy} = 0,\ z''_{yy} = \frac{1}{b}.$$

У точці (0; 0) обчислимо значення других похідних

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_O=\frac{1}{a};\quad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_O=0;\quad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_O=\frac{1}{b}.$$

Обчислимо $AC-B^2=\frac{1}{ab}>0,$ причому $A>0$.

Отже в точці О функція має мінімум.

$$Z_{\min}=z(0;0)=\frac{0^2}{2a}+\frac{0^2}{2b}=0$$

Відповідь. $Z_{\min}=z(0;0)=0$.

Приклад 2. Знайти екстремум функції $z=\frac{1}{2}xy+(47-x-y)\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right)$.

Розв'язання.

1) Знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{12}y-\frac{2}{3}x+\frac{47}{3},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{2}y-\frac{1}{12}x+\frac{47}{4}.$$

2) Користуючись необхідними умовами, знаходимо стаціонарні точки:

$$\begin{cases}-\frac{1}{12}y-\frac{2}{3}x+\frac{47}{3}=0\\ -\frac{1}{2}y-\frac{1}{12}x+\frac{47}{4}=0\end{cases}\quad \text{або} \quad \begin{cases}8x+y=188\\ x+6y=141\end{cases}.$$

Звідси $x=21,\ y=20$.

Стаціонарна точка $M(21,\ 20)$.

3) Знайдемо похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{2}{3},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{12}.$$

$$\Delta=AC-B^2=\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{12}\right)^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{144}>0.$$

Оскільки $A<0$, то в точці M функція має максимум:

$$z_{\max}=\frac{21}{2}\cdot 20+(47-21-20)\left(\frac{21}{3}+\frac{20}{4}\right)=282.$$

Приклад 3. Знайти екстремум функцій.

1) $z=2x^3+xy^2+5x^2+y^2$; 2) $z=e^{2x}(x+y^2+2y)$

Приклад 4. Знайти екстремум функції $z = xy$ за умови, що x і y задовольняють рівняння $2x + 3y - 5 = 0$.

Розв'язання.

Розглянемо функцію Лагранжа $u = xy + \lambda(2x + 3y - 5)$.

Маємо: $\frac{\partial u}{\partial x} = y + 2\lambda$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x + 3\lambda$.

Із системи рівнянь (необхідні умови екстремуму)

$$\begin{cases} y + 2\lambda = 0 \\ x + 3\lambda = 0 \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$$

знаходимо $\lambda = -\frac{5}{12}$, $x = \frac{5}{4}$, $y = \frac{5}{6}$.

Обчислимо другий диференціал функції Лагранжа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$d^2 u = 2dxdy.$$

Знайдемо перший диференціал функції $\varphi(x, y)$: $d\varphi = 2dx - 3dy.$

Диференціали dx і dy задовольняють умову

$$2dx - 3dy = 0;$$

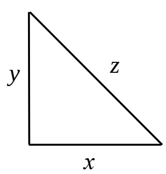
$$dx = \frac{3}{2}dy.$$

При виконанні цієї умови другий диференціал функції Лагранжа в точці $\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{6}\right)$ є додатно визначеною квадратичною формою, бо $d^2 u = 2 \cdot \frac{3}{2} dy \cdot dy = 3(dy)^2$.

Отже, в точці $\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{6}\right)$ функція $z = xy$ досягає найбільшого значення $\frac{25}{24}$.

Приклад 4. Із усіх прямокутних трикутників із заданою площею S знайти такий, гіпотенуза якого найкоротша.

Розв'язання.



Нехай x і y — катети трикутника, а z — гіпотенуза. Задача зводиться до знаходження найменшого значення функції $x^2 + y^2$ за умовою, що x і y задовольняють рівняння $\frac{xy}{2} = S$, або рівняння $xy - 2S = 0$, бо $z^2 = x^2 + y^2$.

Розглянемо функцію $u = x^2 + y^2 + \lambda(xy - 2S)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + \lambda y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + \lambda x.$$

Оскільки $x > 0$, $y > 0$, із системи рівнянь $\begin{cases} 2x + \lambda y = 0 \\ 2y + \lambda x = 0 \\ \dfrac{xy}{2} = S \end{cases}$ дістаємо розв'язок $x = y = \sqrt{2s}$, $\lambda = -2$.

Таким чином, гіпотенуза найкоротша, якщо катети трикутника рівні між собою.

Приклад 5. Знайти найменше та найбільше значення функції $z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ в області, обмеженій параболою $y = x^2$, прямою *y=4* та віссю *Oy (x≥0)*.

Розв'язання.

Зобразимо на рисунку область *D*, обмежену параболою $y = x^2$, прямою *y=4* та віссю *Oy (x≥0)*.

Знаходимо стаціонарні точки функції. Маємо $\begin{array}{l} Z'_x = 6x^2 + 8x - 2y \\ Z'_y = 2y - 2x \end{array}$

Рис. 8.7

Згідно з необхідними умовами існування екстремуму функції двох змінних одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 6x^2 + 8x - 2y = 0 \\ 2y - 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 + 8x - 2y = 0 \\ 2y = 2x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x^2 + 8x - 2x = 0 \Rightarrow 6x^2 + 6x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -1.$$

В середині області *D* $x \geq 0$, тому $\begin{cases} x = 0 \\ y = x = 0 \end{cases}$.

Стаціонарна точка O(0;0) належить області *D*, тому обчислюємо значення $Z(O) = 2 \cdot 0^3 + 4 \cdot 0^2 + 0^2 - 2 \cdot 0 \cdot 0 = 0$.

Тепер проведемо дослідження функції на межі області *D*. Рівняння сторони *OA x=0* , і на відрізку *OA* функція Z приймає вигляд $Z = y^2$. Знайдемо найбільше і найменше значення цієї функції однієї змінної *y* на замкненому відрізку $[0;4]$: $Z = y^2$; $Z' = 2y \Rightarrow Z' = 0 \Rightarrow 2y = 0 \Rightarrow y = 0$.

Отже, $Z(A) = 0$.

Аналогічно знаходимо найбільше і найменше значення функції Z на відрізку *AB*: $y = 4,\ x \in [0;2]$. Маємо

$$Z = 2x^3 + 4x^2 + 4^2 - 2 \cdot x \cdot 4 = 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16$$

$$Z' = 6x^2 + 8x - 8 \Rightarrow Z' = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{2}{3},\ x_2 = -2 \notin [0;2]$$

Звідси

$$Z(M) = Z\left(\frac{2}{3}\right) = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 8 \cdot \frac{2}{3} + 16 = \frac{16 + 48 - 432}{27} + 16 = -13\frac{11}{27} + 16 = 2\frac{16}{27}$$

$$Z(B) = Z(2) = 2 \cdot (2)^3 + 4 \cdot (2)^2 - 8 \cdot 2 + 16 = 16 + 16 - 16 + 16 = 32$$

Знайдемо найбільше і найменше значення функції Z на кривій OB. На параболі $y = x^2$ функція Z приймає вигляд

$$Z = 2x^3 + 4x^2 + x^4 - 2x^3 = x^4 + 4x^2,\ x \notin [0;2].$$

$$Z' = 4x^3 + 8x \Rightarrow Z' = 0 \Rightarrow 4x(x^2 + 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Звідси $Z(0) = 0$.

Отже, задана функція Z має найбільше значення в точці B(2;4), найменше значення в точці O(0;0) на межі області.

$$\max_D Z = Z(B) = Z(2;4) = 32$$

$$\min_D Z = Z(O) = Z(0;0) = 0$$

Приклад 6. Знайти найбільше значення функції $z = x^2 y(4 - x - y)$ у трикутнику, обмеженому прямими $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

5. Підведення підсумків заняття.

6. Домашнє завдання:

Бубняк Т.І. Вища математика: Навч.посібник. – Львів.,2004. – стор. 120-128, Завдання 4(2,4), 5(1,4). Індивідуальні завдання.