Практичне заняття № 13.

Тема: Розв’язування вправ на інтегрування функцій.

Мета: узагальнити та систематизувати теоретичні знання з теми «Основні методи інтегрування», набути навичок і вмінь обчислювати невизначені інтеграли методом безпосереднього інтегрування, методом заміни змінної, методом інтегрування за частинами.

1. **Організаційний момент**
2. **Актуалізація опорних знань:** усне опитування

- Що називається первісною даної функції?
- Дати означення невизначеного інтеграла.
- Сформулювати властивості невизначеного інтеграла.
- На чому базується метод безпосереднього інтегрування?
- Як застосовується метод заміни змінної у невизначеному інтегралі?
- Які типи інтегралів зручно обчислювати методом інтегрування за частинами?

3. **Мотивація навчання**: повідомлення теми й мети заняття
4. **Розв’язування вправ.**

План практичного заняття

1. **Обчислення інтегралів методом безпосереднього інтегрування. Знаходження умовних екстремумів.**
2. **Обчислення інтегралів методом заміни змінної.**
3. **Обчислення інтегралів методом інтегрування за частинами.**

Термінологічний словник ключових понять

Первісна даної функції — функція, похідна від якої дорівнює даній функції.

$$F'(x) = f(x)$$

Інтегрування функції — знаходження первісних функції.

Невизначений інтеграл від даної функції — загальний вигляд всієї множини первісних даної функції.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Інтегрування безпосереднє — метод інтегрування, що базується на основних властивостях невизначеного інтеграла і таблиці інтегралів.

Інтегрування підстановки — метод інтегрування за формулою

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \begin{vmatrix} \varphi(x) = u \\ \varphi'(x)dx = du \end{vmatrix} = \int f(u)du = = F(u) + C = F(\varphi(x)) + C.$$

Інтегрування частинами — метод інтегрування, що базується на формулі $\int udv = uv - \int vdu$.

«Неінтегровні» інтеграли — існують, але через основні елементарні функції не виражаються.

$$\int e^{-x^2}dx,\ \int \frac{\sin x}{x},\ \int \frac{dx}{\ln x},\ \int \cos x^2 dx$$

Завдання для практичного виконання:

Приклад 1. Використовуючи перетворення

$$\int f(ax+b)dx = \frac{a}{a}\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b),$$

знайти такі інтеграли:

1. $\int e^{\frac{x}{2}}dx$.
2. $\int 2^{5x+4}dx$.
3. $\int \frac{dx}{10x+3}$.
4. $\int \cos\frac{x+3}{3}dx$.

Розв'язання.

1) $\int e^{\frac{x}{2}}dx = \frac{1}{\frac{1}{2}}e^{\frac{x}{2}} + C = 2e^{\frac{x}{2}} + C$

2) $\int 2^{5x+4}dx = \frac{1}{5}\frac{2^{5x+4}}{\ln 2} + C = \frac{2^{5x+4}}{5\ln 2} + C$

3) $\int \frac{dx}{10x+3} = \frac{1}{10}\ln|10x+3| + C$

4) $\int \cos\frac{x+3}{3}dx = 3\sin\frac{x+3}{3}+C$

Приклад 2. Розклавши підінтегральні функції за формулою

$$\int\left(f(x)\pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx,$$

знайти такі інтеграли:

1. $\int tg^2 xdx$.
2. $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$.
3. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$.

Розв'язання.

1) $\int tg^2 xdx = \int\left(1-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx = x - tgx + C$

2) $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int\frac{1+x^2+x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1+x^2}\right)dx = -\frac{1}{x}+arctgx+C$

3) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx = -cthx - tgx + C$

Приклад 3. Безпосереднім інтегруванням знайти інтеграли:

1. $\int e^{\sin x}\cos xdx$.
2. $\int\frac{x^2dx}{(4x^3+9)^4}$.

Розв'язання.

1) $\int e^{\sin x}\cos xdx = \int e^{\sin x}d(\sin x) = e^{\sin x}+C$

2) $\int\frac{x^2dx}{(4x^3+9)^4} = \frac{1}{12}\int\frac{d(4x^3+9)}{(4x^3+9)^4} = \frac{1}{12}\cdot\frac{-1}{3(4x^3+9)^3}+C = -\frac{1}{36(4x^3+9)^3}+C$

Приклад 4. Знайти невизначені інтеграли. Результати перевірити диференціюванням.

а) $\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}dx$, б) $\int\frac{\lg(x+3)}{x+3}dx$

Розв'язання.

а) $\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}dx$

Використовуючи метод підстановки та таблицю інтегралів, дістанемо:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}dx = \left| \begin{array}{l} u = 1-x^4 \\ du = -4x^3dx \\ \dfrac{du}{-4} = x^3dx \end{array} \right| = \int \frac{du}{-4\sqrt{u}} = -\frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{u} + C = -\frac{\sqrt{1-x^4}}{2} + C$$

Отриманий результат перевіримо диференціюванням

$$\left(-\frac{\sqrt{1-x^4}}{2} + C\right)' = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^4}}\cdot\left(1-x^4\right)' = -\frac{1}{4\sqrt{1-x^4}}\cdot\left(-4x^3\right) = \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}$$

б) $\int \frac{\lg(x+3)}{x+3}dx$

Використовуючи метод підстановки та таблицю інтегралів, дістанемо:

$$\int \frac{\lg(x+3)}{x+3}dx = \left| \begin{array}{l} u = \lg(x+3) \\ du = \dfrac{1}{x+3}\cdot \lg e dx \\ \dfrac{du}{\lg e} = \dfrac{dx}{x+3} \end{array} \right| = \int \frac{udu}{\lg e} = \frac{1}{\lg e}\cdot\frac{u^2}{2} + C = \frac{(\lg(x+3))^2}{2\lg e} + C$$

Отриманий результат перевіримо диференціюванням

$$\left(\frac{(\lg(x+3))^2}{2\lg e} + C\right)' = \frac{1}{2\lg e}\cdot 2\lg(x+3)\cdot(\lg(x+3))' = \frac{\lg(x+3)}{\lg e}\cdot\frac{1}{x+3}\cdot \lg e = \frac{\lg(x+3)}{x+3}$$

Приклад 5. Знайти невизначені інтеграли

1) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.,

2) $\int \sqrt{2+3\cos 4x}\sin 4xdx$

Розв'язання.

1) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{1}{t}; \\ dx = -\dfrac{1}{t^2}dt \end{array} \right| = \int \frac{-\dfrac{1}{t^2}dt}{\dfrac{1}{t}\sqrt{\dfrac{1}{t^2}-1}} = -\int \frac{\dfrac{1}{t^2}dt}{\dfrac{1}{t}\sqrt{\dfrac{1-t^2}{t^2}}} = -\int \frac{\dfrac{1}{t^2}dt}{\dfrac{1}{t^2}\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\arcsin t + C = -\arcsin\frac{1}{x} + C.$$

2) $\int \sqrt{2+3\cos 4x}\sin 4xdx$

$$\int\sqrt{2+3\cos 4x}\sin 4xdx=\left|\begin{array}{l}u=2+3\cos 4x\\du=-12\sin 4xdx\\\dfrac{du}{-12}=\sin 4xdx\end{array}\right|=\int-\frac{1}{12}\sqrt{u}du=-\frac{1}{12}\int u^{\frac{1}{2}}du=-\frac{1}{12}\cdot\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=-\frac{\sqrt{u^3}}{18}+C=$$

$$=-\frac{\sqrt{(2+3\cos 4x)^3}}{18}+C$$

Приклад 6. Знайти невизначені інтеграли

1) $\int x\sin 4xdx$,

2) $\int x\cos 2xdx$

3) $\int x\operatorname{arctg} xdx$

4) $\int x^2e^{3x}dx$

Розв'язання.

1)
$$\int x\sin 4xdx=\left|\begin{array}{ll}u=x & du=dx\\dv=\sin 4xdx & v=\int\sin 4xdx=-\dfrac{\cos 4x}{4}\end{array}\right|=x\cdot\left(-\frac{\cos 4x}{4}\right)-\int-\frac{\cos 4x}{4}dx=$$
$$=-\frac{x\cos 4x}{4}+\frac{\sin 4x}{16}+C$$

2)
$$\int x\cos 2xdx=\left|\begin{array}{ll}u=x & du=dx\\dv=\cos 2xdx & v=\int\cos 2xdx=\dfrac{\sin 2x}{2}\end{array}\right|=x\cdot\frac{\sin 2x}{2}-\int\frac{\sin 2x}{2}dx=$$
$$=x\cdot\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\cos 2x}{4}+C$$

3)
$$\int x\operatorname{arctg} xdx=\left|\begin{array}{l}u=\operatorname{arctg} x,\quad du=\dfrac{dx}{x^2+1};\\dv=xdx\Rightarrow v=\int xdx=\dfrac{x^2}{2}\end{array}\right|=\left|\int udv=uv-\int vdu\right|==\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-$$
$$-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}(x-\operatorname{arctg} x)+C.$$

4) Інколи доводиться інтегрування частинами застосовувати кілька разів

$$\int x^2e^{3x}dx=\left|\begin{array}{l}u=x^2,du=2xdx;\\dv=e^{3x}dx\Rightarrow v=\dfrac{1}{3}e^{3x}\end{array}\right|=\frac{x^2}{3}e^{3x}-\frac{2}{3}\int xe^{3x}dx=\left|\begin{array}{l}u=x,du=dx;\\dv=e^{3x}dx\Rightarrow v=\dfrac{1}{3}e^{3x}\end{array}\right|=$$
$$=\frac{x^2}{3}e^{3x}-\frac{2}{3}\left(\frac{x}{3}e^{3x}-\frac{1}{3}\int e^{3x}dx\right)=e^{3x}\left(\frac{x^2}{3}-\frac{2}{9}x+\frac{2}{27}\right)+C.$$

Самостійне розв'язування вправ.

I варіант | II варіант

Знайти невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{dx}{(5x+2)^2}$	1) $\int \frac{dx}{\sqrt{9+4x^2}}$
2) $\int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$	2) $\int e^{x^2+3} x dx$
3) $\int x^4 \ln x dx$	3) $\int x e^{2x} dx$

5. Підведення підсумків заняття.

6. Домашнє завдання:

Бубняк Т.І. Вища математика: Навч.посібник. – Львів.,2004. – стор. 134-141, 151 Завдання 1(3,5,8,25,26), 3(3,9). Індивідуальні завдання.