# Практичне заняття № 14.

## Тема: Обчислення визначених інтегралів. Застосування визначеного інтегралу.

**Мета**: узагальнити та систематизувати теоретичні знання з теми «Визначений інтеграл, його властивості та методи обчислення», набути навичок і вмінь обчислювати визначені інтеграли різними методами. Розглянути основні застосування визначеного інтегралу в геометрії, фізиці, економіці, набути навичок і вмінь обчислювати площі фігур, довжини дуг кривої, об'єми тіл обертання, роботу сил за допомогою визначеного інтегралу.

1. **Організаційний момент**
2. **Актуалізація опорних знань:** усне опитування

- Які задачі приводять до поняття визначеного інтегралу?
- Що таке криволінійна трапеція?
- Пояснити поняття інтегральної суми.
- Що називається визначеним інтегралом?
- Сформулювати теорему про існування визначеного інтеграла.
- Сформулювати властивості визначеного інтеграла.
- Записати і довести формулу Ньютона-Лейбніца.
- У чому полягає метод інтегрування частинами у визначеному інтегралі?
- Які ви знаєте наближені методи обчислення визначених інтегралів?
- Як обчислити площу плоскої фігури в системі декартових координат? полярних координат?
- Як знайти роботу змінної сили за допомогою визначеного інтегралу?
- Які інші застосування визначеного інтеграла ви знаєте?
- Що можна сказати про застосування визначеного інтеграла в економіці?

3. **Мотивація навчання**: повідомлення теми й мети заняття
4. **Розв'язування вправ.**

**План практичного заняття**

1. **Обчислення визначених інтегралів за формулою Ньютона-Лейбніца, методом заміни змінної та методом інтегрування за частинами.**
2. **Обчислення площ плоских фігур та об'ємів тіл обертання.**
3. **Фізичні застосування визначеного інтеграла.**
4. **Застосування визначеного інтеграла в економіці**.

**Термінологічний словник ключових понять**

***Криволінійна трапеція*** — плоска фігура, що обмежена лініями:

$$y = f(x) \geq 0,\ y = 0,\ x = a,\ x = b.$$

***Інтегральна сума*** — сума виду $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ .

***Визначений інтеграл*** — границя інтегральної суми при $\max \Delta x_i \to 0$.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ n \to \infty}} s_n = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

***Інтегровна функція*** — функція, для якої існує визначений інтеграл.

***Геометричний зміст визначеного інтеграла*** — $\int_a^b f(x)dx$ (при $f(x) > 0$) чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = f(x)$, $x = a,\ x = b,\ y = 0$.

***Формула Ньютона-Лейбніца*** — метод інтегрування визначеного інтегралу, якщо відоме значення відповідного невизначеного інтегралу.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

***Заміна змінної у визначеному інтегралі*** — метод інтегрування визначеного інтегралу за формулою $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, де $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$

***Інтегрування частинами*** — метод інтегрування визначеного інтегралу за формулою $\int\limits_a^b udv = (uv)\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$.

***Визначений інтеграл зі змінною верхньою межею інтегрування*** — інтеграл виду $\int\limits_a^x f(t)dt$ .

***Наближенні методи обчислення визначенного інтегралу*** — методи обчислення за

1) ***формулою прямокутників***

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} y_i \Delta x = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i, \text{ або } \int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta x = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i.,$$

2) ***формулою трапецій***

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{2}(y_0 + y_n) + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right),$$

3) ***формулою Сімпсона***

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6m}(y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2m-2}) + (y_1 + y_3 + ... + y_{2m-1}))..$$

***Площа криволінійної трапеції, обмеженої лініями*** $y = f(x)$, $x = a,\ x = b,\ y = 0$ (при $f(x) > 0$) визначається формулою $S = \int\limits_a^b f(x)dx$. Якщо $f(x) \le 0$, то $S = \left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|$.

***Площа фігури, обмеженої лініями*** $y = f(x)$, $y = g(x), x = a, x = b.$ ( $f(x) \ge g(x)$) для $x \in [a;\ b]$ обчислюється за формулою $S = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))dx.$

***Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ох криволінійної трапеції***, утвореної лініями *y=f(x), y=0, x=a, x=b* обчислюється за формулою

$$V = \int\limits_a^b \pi f^2(x)dx.$$

***Об'єм тіла*** $V_y$, ***утвореного обертанням навколо осі Оу фігури***, обмеженої лініями $x = 0$, $x = \varphi(y) \ge 0$, $y = c$, $y = d$ — $V_y = \pi\int\limits_c^d (\varphi(y))^2 dy$.

***Довжина дуги АВ кривої*** $y = f(x)$, $a \le x \le b$, обчислюється за формулою

$$s = \int\limits_a^b \sqrt{1 + y'^2}dx$$

***Шлях, пройдений точкою за відрізок часу*** $[t_1;t_2]$, обчислюється за формулою:

$$S=\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt\,.$$

***Сумарні витрати*** $S_{\text{вит.}}$ споживачів наближено дорівнюють визначеному інтегралу $S_{\text{вит.}}=\int_0^{Q_0} f(Q)dQ$

Надлишок споживача $S_{\text{над.}}$ — це різниця між витратами споживача, які можуть бути і реальними витратами в умовах ринку: $S_{\text{над.}}=\int_0^{Q} f(Q)dQ-P_0Q_0$

Додаткова вартість виробника – $S_{\text{вигода}}=P_0Q_0-\int_0^{Q_0} f(Q)dQ$.

## Завдання для практичного виконання:

**Приклад 1**. Обчислити інтеграли:

1) $\int_1^2 x^2dx$, 2) $\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{2\sin x}{(1-\cos x)^2}dx$, 3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2xdx$, 4) $\int_0^1 \frac{3x-1}{4x^2-4x+17}dx$

*Розв'язання.*

1) $\int_1^2 x^2dx$

Знайдемо невизначений інтеграл $\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+C$. За формулою Ньютона-Лейбніца маємо:

$$\int_1^2 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2=\frac{2^3}{3}-\frac{1^3}{3}=2\frac{1}{3}$$

2) $\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{2\sin x}{(1-\cos x)^2}dx$

За формулою заміни змінної маємо:

$$\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{2\sin x}{(1-\cos x)^2}dx=\left|\begin{matrix} u=1-\cos x & u_1=1-\cos\frac{\pi}{2}=1 \\ du=\sin xdx & u_2=1-\cos\pi=2\end{matrix}\right|=2\int_1^2\frac{du}{u^2}=-2u^{-1}\Big|_1^2=-1+2=1$$

3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \ \ du = dx; \\ \cos 2x dx = dv, \\ v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right| = \left(\frac{x}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx =$

$$= \frac{1}{2}\left(x\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\sin\pi + \frac{1}{2}\cos\pi\right) - \left(0\cdot\sin 0 + \frac{1}{2}\cos 0\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

4) $\int\limits_0^1 \frac{3x-1}{4x^2-4x+17}dx$

Обчислимо спочатку відповідний невизначений інтеграл

$$\int \frac{3x-1}{4x^2-4x+17}dx = \int \frac{3x-1}{4\left(x^2 - x + \frac{17}{4}\right)}dx = \frac{1}{4}\int \frac{(3x-1)dx}{x^2 - 2\cdot x\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{17}{4}} =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{(3x-1)dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + 4} = \left| \begin{array}{l} x - \frac{1}{2} = t; dx = dt \\ x = t + \frac{1}{2}; \end{array} \right| = \frac{1}{4}\int \frac{3t + \frac{3}{2} - 1}{t^2+4}dt = \frac{3}{4}\int\frac{tdt}{t^2+4} + \frac{1}{8}\int\frac{dt}{t^2+4} =$$

$$= \frac{3}{8}\ln\left(t^2+4\right) + \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \frac{3}{8}\ln\left(x^2 - x + \frac{17}{4}\right) + \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{2} + C =$$

$$= \frac{3}{8}\ln\left(4x^2 - 4x + 17\right) + \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{4} + C.$$

Знайдемо значення заданого інтеграла, використовуючи формулу Ньютона-Лейбніца

$$\int\limits_0^1 \frac{3x-1}{4x^2-4x+17}dx = \left(\frac{3}{8}\ln\left(4x^2-4x+17\right) + \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \left(\frac{3}{8}\ln(4-4+17) + \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{2-1}{4}\right) -$$
$$-\left(\frac{3}{8}\ln(0-0+17) + \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{0-1}{4}\right) = \left(\frac{3}{8}\ln 17 + \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{3}{8}\ln 17 + \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{4}\right)\right) = \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{1}{4} -$$
$$-\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{4}\right)$$

**Приклад 2.** Обчислити наближено при $n$=10 за формулами прямокутників, трапецій, Сімпсона такий інтеграл: $I = \int\limits_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$.

*Розв'язання.*

Поділимо проміжок [1; 2] на 10 рівних частин, тобто візьмемо $\Delta x = \frac{2-1}{10} = 0{,}1$ та складемо таку таблицю значень функції $y = \frac{1}{x}$:

| $x_i$ | $y_i$ | $x_i$ | $y_i$ |
|---|---|---|---|
| $x_0 = 1{,}0$ | $y_0 = 1{,}00000$ | $x_6 = 1{,}6$ | $y_6 = 0{,}62500$ |
| $x_1 = 1{,}1$ | $y_1 = 0{,}90909$ | $x_7 = 1{,}7$ | $y_7 = 0{,}58824$ |
| $x_2 = 1{,}2$ | $y_2 = 0{,}83333$ | $x_8 = 1{,}8$ | $y_8 = 0{,}55556$ |
| $x_3 = 1{,}3$ | $y_3 = 0{,}76923$ | $x_9 = 1{,}9$ | $y_9 = 0{,}52632$ |
| $x_4 = 1{,}4$ | $y_4 = 0{,}71429$ | $x_{10} = 2{,}0$ | $y_{10} = 0{,}50000$ |
| $x_5 = 1{,}5$ | $y_5 = 0{,}66667$ | | |

За формулою лівих прямокутників ($n$=10)

$$I \approx \frac{b-a}{10}\left(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_9\right) = 0{,}1 \cdot 7{,}18773 \approx 0{,}71877.$$

За формулою правих прямокутників ($n$=10)

$$I = \frac{b-a}{10}\left(y_1 + y_2 + \ldots + y_{10}\right) = 0{,}1 \cdot 6{,}68773 \approx 0{,}66877.$$

За формулою трапецій ($n$=10)

$$I \approx \frac{b-a}{10}\left(\frac{y_0 + y_{10}}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_9\right) = 0{,}1 \cdot 6{,}93773 \approx 0{,}69377.$$

За формулою Сімпсона $n$=2$m$=10

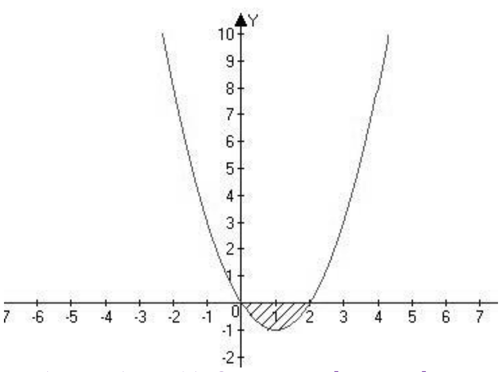
$$I \approx \frac{b-a}{6 \cdot 5}\left(y_0 + y_{10} + 2\left(y_2 + y_4 + y_6 + y_8\right) + 4\left(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9\right)\right) == \frac{1}{30} \cdot 20{,}79456 \approx 0{,}69315.$$

Згідно з таблицею натуральних логарифмів $I = \ln 2 \approx 0{,}693147$, і отже, найбільш точним виявилось обчислення за формулою Сімпсона.

**Приклад 3**. Обчислити площу фігури, обмеженої віссю $Ox$ і лінією $y=x^2-2x$.

*Розв'язання.*

Зробимо малюнок.




Знайдемо границі інтегрування, тобто абсциси точок перетину графіків функцій $y=x^2-2x$ і $y=0$. Для цього розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0$$

$x = 0,\ x = 2$

Тепер знайдемо шукану площу за формулою $S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx$. Маємо:

$$S = \int_0^2 (0 - (x^2 - 2x))dx = -\frac{1}{3}x^3\Big|_0^2 + 2\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = -\frac{1}{3}(8-0) + (4-0) = -\frac{8}{3} + 4 = 1\frac{1}{3}$$

Отже S=1 $^1/_3$ кв. од.

Відповідь. S=1 $^1/_3$ кв. од.

**Приклад 4.** Обчислити площу фігури, обмеженої даними лініями. Зробити креслення.

$$\acute{o} = (\tilde{o}+3)^2(\tilde{o}-1); \qquad \acute{o} = -(\tilde{o}+3)^2$$

*Розв'язання.*

Знаходимо точки перетину даних ліній:

$$\begin{cases} \acute{o} = (\tilde{o}+3)^2(\tilde{o}-1) \\ \acute{o} = -(\tilde{o}+3)^2 \end{cases}$$

$$(\tilde{o}+3)^2(\tilde{o}-1) = -(\tilde{o}+3)^2$$

$$(\tilde{o}+3)^2(\tilde{o}-1) + (\tilde{o}+3)^2 = 0$$

$$(\tilde{o}+3)^2(\tilde{o}-1+1) = 0$$

$$(\tilde{o}+3)^2\,\tilde{o} = 0$$

$$\begin{cases} \tilde{o}_1 = -3 \\ \acute{o}_1 = 0 \end{cases} \quad \text{àáî}$$

$$\begin{cases} \tilde{o}_2 = 0 \\ \acute{o}_2 = -9 \end{cases}$$

Отже, точки перетину даних ліній мають координати $\grave{A}(-3;0)$ і $D(0;-9)$.

Побудуємо графіки даних функцій.

Графіком функції $\acute{o} = -(\tilde{o}+3)^2$ – є парабола з вершиною в точці $\grave{A}(-3;0)$. Вітки параболи напрямлені вниз.

Дослідимо функцію $\acute{o} = (\tilde{o}+3)^2(\tilde{o}-1)$.

1) ОДЗ: $x \in (-\infty;\infty)$.
2) Дослідимо функцію на парність (непарність):
   $y(-x) = (-\tilde{o}+3)^2(-1-\tilde{o}) \neq y(x) \neq -y(x) \Rightarrow$ функція ні парна, ні непарна.
3) Перетин з осями: $x = 0 \Rightarrow y = -9 \Rightarrow D(0;-9)$
   $y = 0 \Rightarrow x_1 = 1;\ \ x_2 = -3 \Rightarrow C(1;0)\ \ i\ \ A(-3;0)$
4) Функція неперервна при $x \in (-\infty;\infty)$.

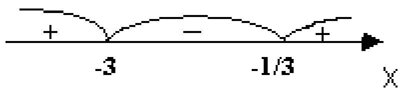
5) Знайдемо похідну функції

$$y' = 2(x+3)(x-1) + (x+3)^2 = (x+3)(2x-2+x+3) = (x+3)(3x+1)$$

$$y' = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(x+3)(3x+1) = 0$$

$$x_1 = -\frac{1}{3}; \quad x_2 = -3$$

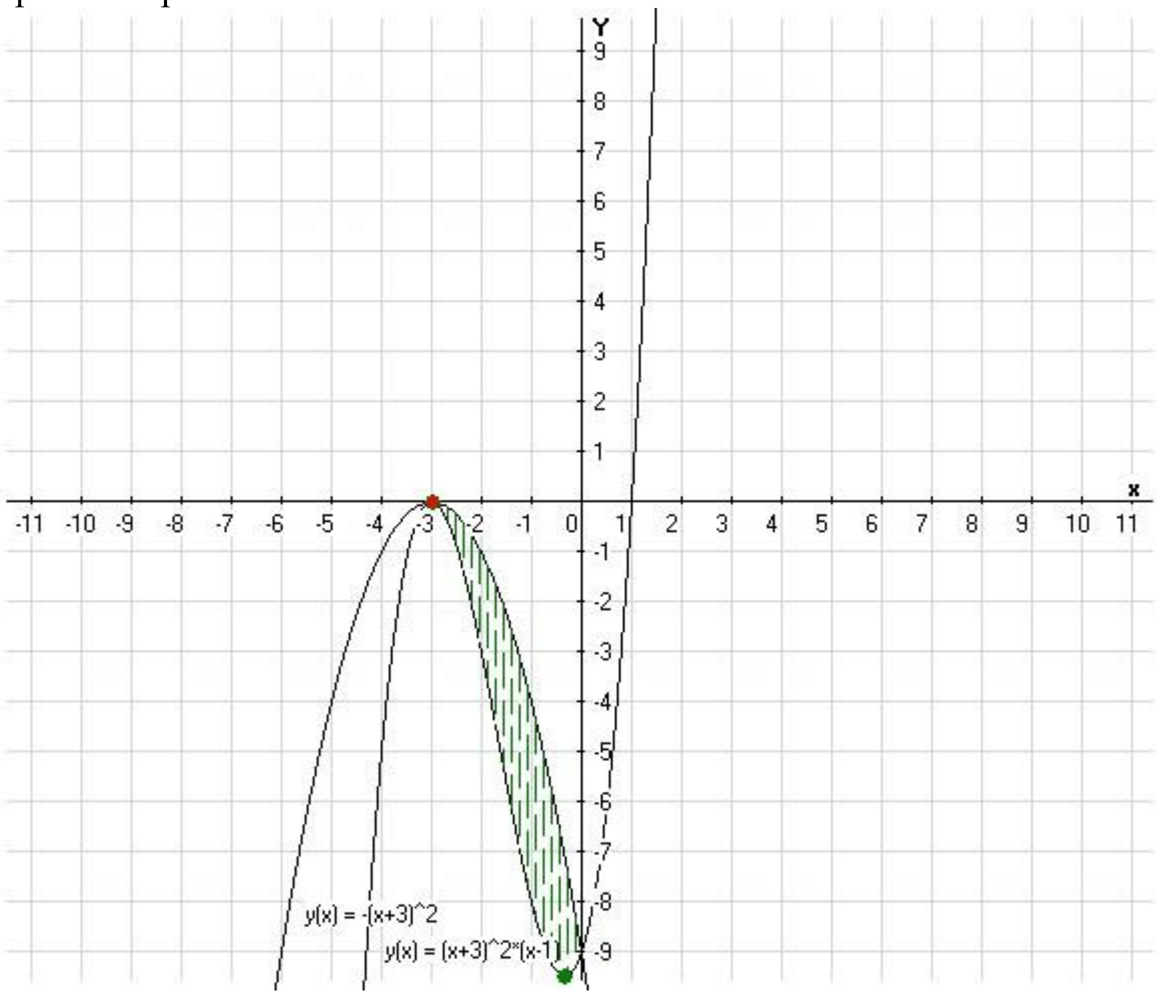



Функція зростає при $\tilde{o} \in (-\infty;-3) \cup (-1/3;\infty)$ і спадає при $\tilde{o} \in (-3;-1/3)$.

$$x_{\min} = -1/3 \qquad x_{\max} = -3$$

$$y_{\min} = -9\frac{13}{27} \qquad y_{\max} = 0$$

Зробимо креслення




Знайдемо площу замкненої фігури на відрізку $[-3;0]$.

$$\int_{-3}^{0}\left(-(x+3)^2\right)-\left((x+3)^2(x-1)-\right)dx=\int_{-3}^{0}\left(-(x+3)^2(x-1)-(x+3)^2\right)dx=\int_{-3}^{0}\left(-(x+3)^2\,\text{õ}\right)dx=$$

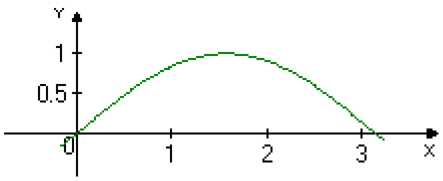
$$=\int_{-3}^{0}\left(-\left(x^2+6x+9\right)\text{õ}\right)dx=\int_{-3}^{0}\left(-x^3-6x^2-9x\right)dx=\left(-\frac{x^4}{4}-\frac{6x^3}{3}-\frac{9x^2}{2}\right)\Bigg|_{-3}^{0}=$$

$$=0-\left(-\frac{(-3)^4}{4}-\frac{6\cdot(-3)^3}{3}-\frac{9\cdot(-3)^2}{2}\right)=+\frac{81}{4}-54+\frac{81}{2}=\frac{81-216+162}{4}=\frac{27}{4}=6{,}75(\text{êâ.îä .})$$

Відповідь: $6{,}75(\text{êâ.îä .})$.

**Приклад 5.** Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням дуги синусоїди $y=\sin x$ навколо осі *Ox* для *x є* [0;π].

*Розв’язання.*




Візьмемо дугу синусоїди, зображену на рис. Для якої $0\le x\le\pi$. Маємо:

$$V=\pi\int_{0}^{\pi}\sin^2 x dx=\pi\int_{0}^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=.$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_{0}^{\pi}=\frac{\pi^2}{2}(\textit{куб.од.})$$

Відповідь : $\frac{\pi^2}{2}(\textit{куб.од.})$.

**Приклад 6.** Тіло рухається прямолінійно з швидкістю $v=0{,}1t^3(м/с)$. Обчислити шлях, пройдений тілом за перші 10 с.

*Розв’язання.*

Застосовуючи формулу $S=\int_{t_1}^{t_2}f(t)dt$, знаходимо шуканий шлях:

$$S=\int_{0}^{10}0{,}1t^3dt=0{,}1\frac{t^4}{4}\Bigg|_{0}^{10}=\frac{10^4}{40}=250\ м.$$

Відповідь: 250 м.

**Приклад 7.** Яку роботу потрібно виконати, щоб розтягнути пружину на 5 см, якщо сила 100 Н розтягує її на 1 см?

*Розв'язання.*

Згідно закону Гука, пружна сила F, яка діє на пружину зростає пропорційно розтягу x пружини, тобто F = kx. Для визначення коефіцієнта пропорційності, маємо F = 100 Н, x = 0.01 м.

Звідси 100 = k·0.01, тобто k= 10000.

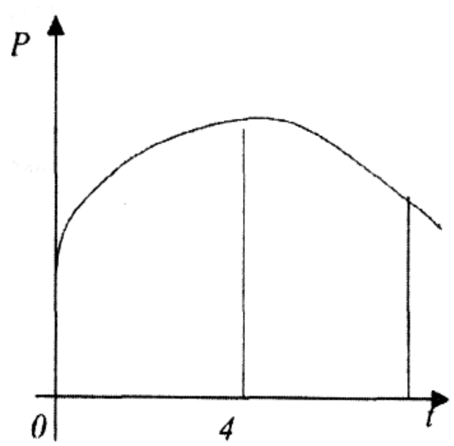
Отже F = 10000x. Тоді шукана робота, згідно (9), рівна

$$A=\int_{0}^{0,05} 10000x\,dx = 5000x^2\Big|_{0}^{0.05} = 12.5\,Дж.$$

**Приклад 8.**Знайти денний виробіток P за робочий день тривалістю 8 годин, якщо продуктивність праці протягом дня змінюється за емпіричною формулою

$$P = f(t) = P_0(-0.2t^2/t_0^{\ 2} + 1.6t/t_0 + 3),$$

де $t$ - час(год), $P_0$ - розмірність продуктивності (одиниця продукції за год.), $t_0$- розмірність часу (год). Ця формула відображає реальний процес роботи (рис.4).




*Розв'язання.*

Продуктивність спочатку зростає, досягаючи максимального значення всередині робочого дня, при $t$=4, а потім спадає.

*Р*

*ис.4*

Денний виробіток становитиме

$$P = P_0 t_0 \int_{0}^{8} (-0.2\,t^2/t_0^{2} + 1.6t/t_0 + 3)dt = 41.07\,P_0 t_0 = 41.07\,a_0,$$

де множник $a_0$ має розмірність одиниці продукції.

**Приклад 9**. Виробництво деякого обладнання характеризується темпом росту його випуску

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta t}\cdot\frac{1}{y},$$

де $\Delta y$ - приріст випуску цього обладнання за час $\Delta t$ , а $y$ - рівень його виробництва за одиницю часу на момент *t*. Знайти загальну кількість обладнання, виготовленого до моменту часу *t*, вважаючи що К - відома постійна величина, одиниця часу - рік, а в початковий момент часу $t$=0 рівень річного виробництва обладнання був $y_0$.

*Розв'язання.*

Вважаючи, що $y$ - неперервна функція від *t*, знайдемо границю

$$k = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \frac{1}{y} = \frac{y'}{y} = (\ln y)'.$$

Інтегруючи останній вираз в межах від 0 до *t*, маємо

$$\ln \frac{y}{y_0} = kt, \text{ або } y = y_0 e^{kt}.$$

Сумарна кількість обладнання, виготовленого за час *t*, буде рівна

$$\mathrm{Y(t)}=\int_0^t y(t)dt = \frac{1}{k} y_0 e^{kt} \Big|_0^t = \frac{1}{k} y_0 (e^{kt} - 1).$$

Тоді, наприклад, при $k$=0.05 ( 5% щорічний темп росту) загальна кількість обладнання, виготовленого за 10 років

$$\mathrm{Y(10)}=20y_0(e^{0.5}-1) \approx 13\, y_0,$$

причому рівень виробництва за вказаний період збільшився майже на 65%.

**5. Підведення підсумків заняття.**

**6. Домашнє завдання**:
Бубняк Т.І. Вища математика: Навч.посібник. – Львів.,2004. – стор. 162-168, індивідуальні завдання.

**Приклад 1.** Знайти інтеграли:

**1.** $\int_0^1 \left(1+e^{3x}\right)^2 e^{3x} dx.$ *Відповідь.* $\frac{1}{9}\left(\left(1+e^3\right)^3 - 8\right).$

**2.** $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$ *Відповідь.* $arctg\, e - \frac{\pi}{4}.$

**3.** $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4 - x^2}}.$ *Відповідь.* $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$

**4.** $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}$. *Відповідь.* $\frac{\sqrt{2}}{8}$.

**Приклад 2.** Обчислити значення інтеграла $I=\int_1^3 \frac{dx}{x}=\ln 3$ за формулами прямокутників, трапецій та Сімпсона, розбивши проміжок інтегрування на 10 рівних частин.

**Приклад 3.** Обчислити площу фігури, обмеженої даними лініями. Зробити креслення. $\acute{o}=\left(\tilde{o}+4\right)^2\left(\tilde{o}-1\right)$; $\acute{o}=-\left(\tilde{o}+4\right)^2$.