Практичне заняття № 15.

Тема: Розв’язування диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними.

Мета: Закріпити отримані теоретичні знання з теми «Диференціальні рівняння», набути навичок і вмінь розв’язувати диференціальні рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними, однорідні диференціальні рівняння І порядку.

1. **Організаційний момент**
2. **Актуалізація опорних знань:** усне опитування

- Навести приклади задач, що приводять до поняття диференціальних рівнянь.
- Дати означення диференціального рівняння першого порядку.
- Що називається розв’язком диференціального рівняння?
- Дати означення загального і частинного розв’язків диференціального рівняння?
- Що таке особливий розв’язок диференціального рівняння? Який його геометричний зміст?
- Що таке задача Коші?
- Як розв’язуються диференціальні рівняння з відокремленими, з відокремлюваними змінними.
- Що таке однорідні диференціальні рівняння?

3. **Мотивація навчання**: повідомлення теми й мети заняття
4. **Розв’язування вправ.**

План практичного заняття

- **Розв’язування диференціальних рівнянь з відокремленими та відокремлюваними змінними.**
- **Розв’язування однорідних диференціальних рівнянь І порядку**.

Термінологічний словник ключових понять

Диференціальне рівняння – рівняння, в яке входять: незалежна зміна *x,* шукана функція *y* та її похідні або диференціали.

$$F(x,y,y')=0, \quad F(x,y,y'')=0$$

Порядок диференціального рівняння – порядок старшої похідної або диференціала, що входить у дане рівняння.

Розв'язок або інтеграл диференціального рівняння – функція, яка перетворює диференціальне рівняння в тотожність.

Загальний розв'язок диференціального рівняння – розв'язок, до якого входить стільки незалежних довільних сталих, який порядок рівняння.

Частинний розв'язок диференціального рівняння – розв'язок, знайдений із загального при різних числових значеннях довільних сталих.

Задача Коші – задача знаходження частинного розв’язку диференціального рівняння при заданих початкових умовах.

Диференціальне рівняння з відокремленими змінними – ДР виду $M(x)dx+N(y)dy=0$.

Загальний розв’язок ДР з відокремленими змінними подається так:

$$\int M(x)dx+\int N(y)dy=C,$$

Диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними – ДР виду

$$N_1(y)M_1(x)dx+M_2(x)N_2(y)dy=0.$$

Однорідне диференціальне рівняння – ДР, яке можна подати у вигляді

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Завдання для практичного виконання:

Приклад 1. Знайти ортогональні траєкторії гіпербол $xy = C$.

Розв'язання.

Складемо ДР сім'ї гіпербол. Виключимо C з рівняння $xy = C$. Диференціюємо рівняння за *x:*

$$xy' + y = 0, \quad y' = -\frac{y}{x}.$$

Для ортогональних ліній $k_2 = -\frac{1}{k_1}$, $y_2{}' = -\frac{1}{y_1'}$. Приходимо до ДР:

$$-\frac{1}{y'} = -\frac{y}{x},\ y' = \frac{x}{y},\ \int y dy = \int x dx,\ \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C/2.$$

Знаходимо сім'ю ортогональних ліній $y^2 - x^2 = C$.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння $x(1 + y^2)dx = ydy$.

Розв'язання.

Відокремивши змінні, маємо:

$$xdx = \frac{ydy}{\left(1 + y^2\right)}$$

Інтегруємо обидві частини цього рівняння;

$$\int xdx = \int \frac{ydy}{\left(1 + y^2\right)}$$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}\ln\left(1 + y^2\right) + \frac{1}{2}\ln C$$

Оскільки довільна стала С може набувати будь-яких числових значень, то для зручності дальших перетворень замість С ми написали $\frac{1}{2}\ln C$.

Потенціюючи останню рівність, дістанемо $x^2 = \ln\left(C\left(1 + y^2\right)\right)$. Це і є загальний розв'язок даного рівняння.

Приклад 3. Знайдемо загальний розв'язок ДР $y' = 2xy^2$.

Розв'язання.

Запишемо рівняння у вигляді

$$\frac{dy}{dx}=2xy^2,\quad \frac{dy}{y^2}=2xdx,\quad \int\frac{dy}{y^2}=\int 2xdx$$

або

$$-\frac{1}{y}=x^2+C,\quad y=-\frac{1}{x^2+C}.$$

Приклад 4. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння $(1+x^2)dy+ydx=0$, при початкових умовах $y(1)=1$.

Розв'язання.

Розділивши обидві його частини на добуток $y(1+x^2)$, одержимо:

$$\frac{dy}{y}+\frac{dx}{1+x^2}=0,\quad \frac{dy}{y}=-\frac{dx}{1+x^2}.$$

Змінні відокремлені. Інтегруючи одержану рівність, знайдемо загальний інтеграл:

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{1+x^2}$$

$$\ln|y|=-artgx+C.$$

Підставивши в загальний розв'язок початкові умови $y=1$ при $x=1$, одержимо:

$$ln(1)=-arctg(1)+C$$

$$0=-\pi/4+C$$

$$C=arctg(1)$$

$$C=\pi/4.$$

Отже після підстановки знайденого значення C у загальний інтеграл, знайдемо частинний інтеграл – розв'язок задачі Коші

$$lny=-arctgx+\pi/4$$

Приклад 5. Знайдемо загальний розв'язок ДР $y' = \frac{y}{x}$.

Розв'язання.

Узявши $y = ux$, дістанемо ДР і його загальний розв'язок $u'x + u = u,\ u'x = 0,\ u = C,\ y = Cx.$

Приклад 6. Знайдемо загальний розв'язок ДР $y' = \frac{y^2}{x^2}$.

Розв'язання.

Візьмемо $y = ux$ і одержимо ДР для змінної

$$u'x + u = u^2,\ x\frac{du}{dx} = u^2 - u,\ \frac{du}{u^2 - u} = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруючи ДР з відокремленими змінними, знаходимо загальний розв'язок:

$$\int \frac{du}{u^2 - u} = \int \frac{dx}{x},\quad \ln\left|\frac{u-1}{u}\right| = \ln x + \ln C,\quad \frac{u-1}{u} = Cx,$$

$$u = \frac{1}{1 - Cx},$$

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{1 - Cx},$$

$$y = \frac{x}{1 - Cx}.$$

Приклад 6. Знайдемо розв'язок однорідного ДР $x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$.

Розв'язання.

ДР можна записати у вигляді $y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$, $y' = \frac{x}{2y} + \frac{y}{2x}$.

Вводимо нову змінну $u = \frac{y}{x}$, $y = ux$:

$$u'(x) + u \cdot 1 = \frac{1}{2u} + \frac{u}{2},\ x\frac{du}{dx} = \frac{1 - u^2}{2u},$$

$$\int \frac{2u\,du}{u^2 - 1} = -\int \frac{dx}{x},\ \ln\left|u^2 - 1\right| = -\ln|x| + \ln C,$$

$$u^2 - 1 = \frac{C}{x},\ \frac{y^2}{x^2} - 1 = \frac{C}{x},\ y^2 = x^2 + Cx.$$

Приклад 7. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $a(x)y' + b(x)y = 0$ і частинний розв'язок, який задовольняє початковій умові $y = y_0$ при $x = x_0$.

$$y'\cos x - 2y\sin x = 0; \qquad y_0 = 3, \quad x_0 = 0.$$

Розв'язання.

ДР можна записати у вигляді $y'\cos x = 2y\sin x$, тоді відокремивши змінні отримаємо

$$\frac{dy}{dx}\cos x = 2y\sin x$$
$$\frac{dy}{y} = 2\frac{\sin xdx}{\cos x} \quad .$$
$$\int\frac{dy}{y} = 2\int\frac{\sin xdx}{\cos x}$$

$$\int\frac{dy}{y} = 2\int\frac{\sin xdx}{\cos x}$$
$$\ln|y| = 2\int tgxdx$$
$$\ln|y| = -2\ln|\cos x| + \ln C$$
$$\ln|y| = \ln C - \ln|\cos^2 x|$$
$$y = \frac{C}{\cos^2 x}$$

Отже загальний розв'язок диференціального рівняння буде

$$y_{заг} = \frac{C}{\cos^2 x}.$$

Використавши початкову умову $y(0) = 3$, знайдемо частинний розв'язок

$$y = \frac{C}{\cos^2 x}$$
$$\frac{C}{\cos^2 0} = 3$$
$$C = 3$$

Частинний розв'язок диференціального рівняння має вигляд:

$$y_{зчас} = \frac{3}{\cos^2 x}$$

Відповідь: $y_{заг} = \dfrac{C}{\cos^2 x}$; $y_{зчас} = \dfrac{3}{\cos^2 x}$

**Додатково.*

Приклад 8. *Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.*

1) $y' = \dfrac{x-y}{x-2y}$

2) $xy'\sin\dfrac{y}{x} + x = y\sin\dfrac{y}{x}$

5. Самостійне розв'язування вправ.

I варіант	II варіант
1. Знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь.	
а) $xy'-y=0$	*а)* $y^2dx+xdy=0$
б) $y'=1+y^2$	*б)* $y'-xy=0$

2. Знайти частинний розв'язок ДР, який задовольняє початковій умові $y = y_0$ при $x = x_0$.

I варіант	II варіант
$y'\cos x + y\sin x = 0;\quad y_0 = 2,\ \ x_0 = 0$	$y' - y\sin x = 0;\quad y_0 = 0,\ \ x_0 = \dfrac{\pi}{2}$

6. Підведення підсумків заняття.

7. Домашнє завдання:

Бубняк Т.І. Вища математика: Навч.посібник. – Львів.,2004. – стор. 181-198, 209 Завдання 1(1-5), 2(1-3). Індивідуальні завдання.