Практичне заняття № 16.

Тема: Лінійні диференціальні рівняння першого порядку.

Мета: Закріпити отримані теоретичні знання з теми «Диференціальні рівняння», набути навичок і вмінь розв'язувати лінійні диференціальні рівняння І порядку та ті, що зводяться до них.

1. **Організаційний момент**
2. **Актуалізація опорних знань:** усне опитування

- Навести приклади задач, що приводять до поняття диференціальних рівнянь.
- Дати означення диференціального рівняння першого порядку.
- Що називається розв'язком диференціального рівняння?
- Дати означення загального і частинного розв'язків диференціального рівняння?
- Що таке особливий розв'язок диференціального рівняння? Який його геометричний зміст?
- Що таке задача Коші?
- Як розв'язуються диференціальні рівняння з відокремленими, з відокремлюваними змінними.
- Що таке однорідні диференціальні рівняння?
- Які диференціальні рівняння називаються неоднорідними?
- В чому полягає метод Бернуллі?
- Що таке метод варіації сталої?

3. **Мотивація навчання**: повідомлення теми й мети заняття
4. **Розв'язування вправ.**

План практичного заняття

- Розв’язування неоднорідних диференціальних рівнянь І порядку.

- Розв’язування диференціальних рівнянь, що зводяться до лінійних ДР І порядку.

Термінологічний словник ключових понять

Диференціальне рівняння – рівняння, в яке входять: незалежна зміна *x,* шукана функція *y* та її похідні або диференціали.

$$F(x,y,y')=0, \quad F(x,y,y'')=0$$

Порядок диференціального рівняння – порядок старшої похідної або диференціала, що входить у дане рівняння.

Розв'язок або інтеграл диференціального рівняння – функція, яка перетворює диференціальне рівняння в тотожність.

Загальний розв'язок диференціального рівняння – розв'язок, до якого входить стільки незалежних довільних сталих, який порядок рівняння.

Частинний розв'язок диференціального рівняння – розв'язок, диференціального рівняння, що не містить довільної сталої.

Задача Коші – задача знаходження частинного розв’язку диференціального рівняння при заданих початкових умовах.

Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними — рівняння, в якому можна відокремити змінні.

Диференціальні однорідні рівняння — рівняння першого порядку з однорідною правою частиною.

Диференціальні рівняння в повних диференціалах — диференціальні рівняння, що визначаються повним диференціалом деякою функцією.

Лінійні диференціальні рівняння — рівняння лінійно залежить від невідомої функції і її похідної.

Завдання для практичного виконання:

Приклад 1. Знайдемо розв’язок ДР $ydx+\left(x-y^3\right)dy=0$ у повних диференціалах.

Розв'язання.

$M(x,y)=y$, $N(x,y)=x-y^3$, $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$.

Рівняння можна подати у вигляді $d(xy)=y^3dy$.

Звідси знаходимо інтеграл ДР $xy-\frac{y^4}{4}=C$.

Приклад 2. Знайдемо загальний розв’язок ДР

$$xy'+y=x^2.$$

Розв’язання.

Розв’язок шукаємо у вигляді добутку функцій $y=u\cdot v$. Підставляючи, дістаємо рівняння

$$x(u'v+uv')+uv=x^2.$$

Зведемо це рівняння до системи ДР:

$$\begin{cases} xuv'+uv=0, \\ xu'v=x^2. \end{cases}$$

Із першого рівняння $xv'+v=0$ знаходимо:

$$v'=-\frac{v}{x},\qquad \frac{dv}{dx}=-\frac{v}{x},\qquad \frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x},\quad \ln|v|=-\ln|x|,\quad v=x^{-1}.$$

Із другого рівняння маємо:

$$xu'x^{-1}=x^2,\ u'=x^2,\ u=\int x^2dx,\ u=\frac{x^3}{3}+c.$$

Знаходимо розв’язок:

$$y=uv,\ \ y=\left(\frac{x^3}{3}+c\right)x^{-1}.$$

Приклад 3. Розв’яжемо лінійне ДР з початковими умовами x_0=1, y_0=1:

$$y' + \frac{y}{x} = 2.$$

Розв'язання.

1. Шукаємо розв'язок за методом Бернуллі:

$$y = uv, \quad u'v + uv' + \frac{uv}{x} = 2.$$

Зводимо рівняння до системи ДР:

$$\begin{cases} uv' + \frac{1}{x}uv = 0 \\ u'v = 2 \end{cases} \quad v' = -\frac{v}{x}, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = -\ln|x|.$$

$$v = \frac{1}{x}, \quad u'\frac{1}{x} = 2, \quad u' = 2x, \quad u = x^2 + C, \quad y = \frac{1}{x}\left(x^2 + C\right).$$

Приклад 4. Знайдемо за методом Лагранжа розв'язок неоднорідного лінійного ДР

$$y' + xy = 1 + x^2.$$

Розв'язання.

Спочатку знайдемо загальний розв'язок однорідного ДР:

$$y' + xy = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = -xy,$$

$$\frac{dy}{y} = -xdx,$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int xdx,$$

$$\ln|y| = -\frac{x^2}{2} + \ln C,$$

$$y = Ce^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Шукаємо розв'язок неоднорідного ДР у вигляді $y = C(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Підставивши в неоднорідне ДР, дістанемо

$$C'_{(x)}e^{-\frac{x^2}{2}} + C_{(x)}e^{-\frac{x^2}{2}}(-x) + xC_{(x)}e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 + x^2,$$

або

$$C'_{(x)} = \left(1 + x^2\right) e^{\frac{x^2}{2}}, \quad C(x) = \int \left(1 + x^2\right) e^{\frac{x^2}{2}} dx.$$

Використаємо формулу інтегрування частинами:

$$\int e^{\frac{x^2}{2}} dx = \left| \begin{array}{ll} u = e^{\frac{x^2}{2}}, & du = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x \\ dv = dx, & v = x \end{array} \right| = xe^{\frac{x^2}{2}} - \int x^2 e^{\frac{x^2}{2}} dx.$$

Отже, остаточно дістанемо загальний розв'язок ДР:

$$C(x) = \int e^{\frac{x^2}{2}} dx + \int x^2 e^{\frac{x^2}{2}} dx = xe^{\frac{x^2}{2}} + C_1,$$

$$y(x) = \left(xe^{\frac{x^2}{2}} + C_1 \right) e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad y(x) = x + C_1 e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Приклад 5. Знайдемо розв'язок за методом Лагранжа. Розв'яжемо однорідне рівняння:

$$y' + \frac{1}{x} y = 0, \; \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}, \; \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}, \; \ln|y| = -\ln|x| + C, \; y = \frac{C}{x}.$$

Розв'язок неоднорідного ДР шукаємо у вигляді $y = \frac{C(x)}{x}$:

$$\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{C(x)}{x} = 2, \; C'(x) = 2x, \; C(x) = x^2 + C_1.$$

Загальний розв'язок має вигляд $y = \frac{1}{x}\left(x^2 + C_1\right)$.

Приклад 6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $\grave{a}(\tilde{o})\acute{o}' + b(x)y = f(x)$ і частинний розв'язок, який задовольняє початковій умові $y = y_0$ при $x = x_0$.

$$y' \cos x - 2y \sin x = 2; \qquad y_0 = 3, \;\; x_0 = 0.$$

Розв'язання.

Нехай $y = uv$, тоді $y' = u'v + uv'$. Підставивши це в рівняння, отримаємо:

$$(u'v + uv')\cos x - 2uv \sin x = 2$$
$$u'v \cos x + u(v' \cos x - 2v \sin x) = 2 \qquad (1)$$

Підберемо функцію v так, щоб $v' \cos x - 2v \sin x = 0$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2v\sin x}{\cos x}$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{2\sin xdx}{\cos x}$$

$$\int\frac{dv}{v} = \int\frac{2\sin xdx}{\cos x}$$

$$\ln v = -2\ln\cos x$$

$$\ln v = \ln\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$v = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Підставимо функцію v в рівняння (1), отримаємо:

$$u' \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \cos x = 2$$

$$u' = 2\cos x$$

$$du = 2\cos xdx$$

$$\int du = \int 2\cos xdx$$

$$u = 2\sin x + C$$

Отже загальний розв'язок диференціального рівняння буде

$$y_{çàã} = uv = (2\sin x + C)\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2\sin x}{\cos^2 x} + \frac{C}{\cos^2 x}.$$

Використавши початкову умову $y(0) = 3$, знайдемо

$$y = \frac{2\sin x}{\cos^2 x} + \frac{C}{\cos^2 x}$$

$$\frac{2\sin 0}{\cos^2 0} + \frac{C}{\cos^2 0} = 3$$

$$C = 3$$

Частинний розв'язок диференціального рівняння має вигляд:

$$y_{ç÷àñ} = \frac{2\sin x}{\cos^2 x} + \frac{3}{\cos^2 x}$$

Відповідь: $y_{çàã} = \frac{2\sin x}{\cos^2 x} + \frac{C}{\cos^2 x}$; $y_{ç÷àñ} = \frac{2\sin x}{\cos^2 x} + \frac{3}{\cos^2 x}$

Приклад 7. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $à(õ)ó' + b(x)y = f(x)$ і частинний розв'язок, який задовольняє початковій умові $y = y_0$ при $x = x_0$.

$$xy' + y = x\sin x; \qquad y_0 = 0, \quad x_0 = \pi.$$

Розв'язання.

Нехай $y = uv$, тоді $y' = u'v + uv'$. Підставивши це в рівняння, отримаємо:

$$(u'v + uv')x + uv = x\sin x$$
$$u'vx + u(v'x + v) = x\sin x \qquad (1)$$

Підберемо функцію v так, щоб $v'x + v = 0$

$$x\frac{dv}{dx} = -v$$
$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$$
$$\int\frac{dv}{v} = -\int\frac{dx}{x}$$
$$\ln|v| = -\ln|x|$$
$$\ln|v| = \ln\frac{1}{|x|}$$
$$v = \frac{1}{x}$$

Підставимо функцію v в рівняння (1), отримаємо:

$$u'\frac{1}{x}x = x\sin x$$
$$u' = x\sin x$$
$$du = x\sin x dx$$
$$\int du = \int x\sin x dx$$
$$u = \int x\sin x dx = \begin{vmatrix} u = x & dv = \sin x dx \\ du = dx & v = \int \sin x dx = -\cos x \end{vmatrix} =$$
$$= -x\cos x + \int\cos x dx = -x\cos x + \sin x + C$$
$$u = -x\cos x + \sin x + C$$

Отже загальний розв'язок диференціального рівняння буде

$$y_{заг} = uv = (-x\cos x + \sin x + C)\frac{1}{x}.$$

Використавши початкову умову $y(\pi) = 0$, знайдемо

$$y=\left(-x\cos x+\sin x+C\right)\frac{1}{x}$$

$$\left(-\pi\cos\pi+\sin\pi+C\right)\frac{1}{\pi}=0$$

$$\left(-\pi(-1)+C\right)\frac{1}{\pi}=0$$

$$C=-\pi$$

Частинний розв’язок диференціального рівняння має вигляд:

$$y_{час}=\left(-x\cos x+\sin x-\pi\right)\frac{1}{x}$$

Відповідь: $y_{заг}=\left(-x\cos x+\sin x+C\right)\frac{1}{x}$; $y_{час}=\left(-x\cos x+\sin x-\pi\right)\frac{1}{x}$

Приклад 8. Знайдемо розв’язок ДР Бернуллі $y'x+y=-xy^2$, $\frac{y'}{y^2}x+\frac{1}{y}=-x$.

Розв’язання.

Візьмемо $z=\frac{1}{y}$, $-z'x+z=-x$, $z'x-z=x$.

Знайдемо розв’язок лінійного ДР за методом Бернуллі. Нехай

$$z=uv,\quad (u'v+uv')x-uv=x.$$

Записуємо систему ДР:

$$\begin{cases} uv'x-uv=0 \\ u'vx=x \end{cases}\quad \frac{dv}{dx}x=v,\quad \frac{dv}{v}=\frac{dx}{x},\quad \ln|v|=\ln|x|,$$

$$v=x,\ u'x^2=x,\ u'=\frac{1}{x},\ u=\ln|x|+C,\ z=x(\ln|x|+C).$$

Остаточно маємо шуканий розв’язок: $y=\frac{1}{x(\ln|x|+C)}$.

5. Самостійне розв’язування вправ.

I варіант | II варіант

Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння $\grave{a}(\tilde{o})\acute{o}'+b(x)y=f(x)$ і частинний розв’язок, який задовольняє початковій умові $y=y_0$ при $x=x_0$.

а) $y'\cos x+y\sin x=1;\quad y_0=2,\ x_0=0$ | *а)* $y'-y\sin x=\sin x\cos;\quad y_0=0,\ x_0=\frac{\pi}{2}$

б) $y' + y = \frac{\mathring{a}^{-\tilde{o}}}{1+\tilde{o}^2}; \quad y_0 = 2, \; x_0 = 0$

б) $y' - \frac{x^2 y}{x^3+1} = x^2 + x^5; \quad y_0 = 0, \; x_0 = 0$

6. Підведення підсумків заняття.

7. Домашнє завдання:

Бубняк Т.І. Вища математика: Навч.посібник. – Львів.,2004. – стор. 181-198, 210 Завдання 3(5-7, 15,16). Індивідуальні завдання.