



Практичне заняття № 2.

Тема: Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Крамера.

Мета: набути навичок і вмінь розв'язувати системи лінійних рівнянь за формулами Крамера

1. Організаційний момент

2. Актуалізація опорних знань: усне опитування

- Що наз. системою m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими?
- Яка система лінійних рівнянь наз. сумісною, несумісною?
- Яка система лінійних рівнянь наз. визначеною, невизначеною?
- Записати формули Крамера.
- В якому випадку доцільно застосовувати формули Крамера?

3. Мотивація навчання: повідомлення теми й мети заняття

4. Розв'язування вправ.

План практичного заняття

1. Розв'язування систем двох та трьох лінійних рівнянь з двома та трьома невідомими за формулами Крамера.

2. Застосування метода Крамера до розв'язування систем чотирьох лінійних рівнянь з чотирма невідомими.

Термінологічний словник ключових понять

Система m лінійних рівнянь з n невідомими x_1, x_2, \dots, x_n – це система виду:

Розв'язання.

Знайдемо визначник системи Δ , і визначники Δ_x , Δ_y , Δ_z .

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 1 - 2 - 1 = -4$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 4 - 1 = 4$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 - 1 = -4$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 1 - 2 - 1 = -8$$

За формулами Крамера маємо:

$$x = \Delta_x / \Delta = 4 / -4 = -1, \quad y = \Delta_y / \Delta = -4 / -4 = 1, \quad z = \Delta_z / \Delta = -8 / -4 = 2.$$

Відповідь: $x = -1$, $y = 1$, $z = 2$.

Приклад 2. Розв'язати системи лінійних рівнянь за правилом Крамера. У разі залежності коефіцієнтів системи рівнянь від параметрів дослідити системи на сумісність.

1. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1; \\ 3x_1 + 7x_2 = 2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} ax_1 + bx_2 = ad; \\ bx_1 + cx_2 = bd. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10; \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 3; \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3; \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2; \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4; \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1; \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2; \\ 3x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 3; \\ 5x_1 - 8x_2 + 6x_3 = 5. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2ax_1 - 23x_2 + 29x_3 = 4; \\ 7x_1 + ax_2 + 4x_3 = 7; \\ 5x_1 + 2x_2 + ax_3 = 5. \end{cases}$

8. $\begin{cases} ax_1 - 3x_2 + 5x_3 = 4; \\ x_1 - ax_2 + 3x_3 = 2; \\ 9x_1 - 7x_2 + 8ax_3 = 0. \end{cases}$

Приклад 3. Розв'язати систему 4-х лінійних рівнянь з 4-ма невідомими

$$1. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - 7x_2 - 3x_3 - x_4 = 23 \\ -x_1 + 5x_2 + x_3 - 3x_4 = -18 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

Розв'язання.

Знайдемо визначник системи.

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -7 & -3 & -1 \\ -1 & 5 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -9 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -9 & -5 & 3 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -9 & -23 & -3 \\ 6 & 14 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -23 & -3 \\ 14 & -2 \end{vmatrix} = -(46 + 42) = -88 \neq 0 \end{aligned}$$

Знайдемо визначники, які утворюються з визначника системи заміною відповідного стовпця на стовпець вільних членів.

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 23 & -7 & -3 & -1 \\ -18 & 5 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 25 & -5 & -4 & 0 \\ -12 & 11 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 25 & -5 & -4 \\ -12 & 11 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= - \begin{vmatrix} 15 & -5 & -14 \\ 10 & 11 & 20 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 15 & -14 \\ 10 & 20 \end{vmatrix} = -(300 + 140) = -440 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 23 & -3 & -1 \\ -1 & -18 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 19 & -1 & -3 \\ -1 & -16 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 19 & -1 & -3 \\ -16 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 19 & -1 & -3 \\ -16 & 0 & -2 \\ 40 & 0 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -16 & -2 \\ 40 & -6 \end{vmatrix} = 96 + 80 = 176 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -7 & 23 & -1 \\ -1 & 5 & -18 & -3 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -9 & 15 & -3 \\ -1 & 6 & -14 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -9 & 15 & -3 \\ 6 & -14 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -9 & -3 & -3 \\ 6 & -2 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -(6 - 6) = 0 \end{aligned}$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -7 & -3 & 23 \\ -1 & 5 & 1 & -18 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -11 & -1 & 19 \\ -1 & 7 & 0 & -16 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -11 & -1 & 19 \\ 7 & 0 & -16 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -11 & -1 & 19 \\ 7 & 0 & -16 \\ -23 & 0 & 40 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -16 \\ -23 & 40 \end{vmatrix} = 280 - 368 = -88$$

За формулами Крамера маємо:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-440}{-88} = 5; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{176}{-88} = -2;$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{-88} = 0; \quad x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{-88}{-88} = 1$$

Отже, розв'язок системи $X = (5; -2; 0; 1)$.

$$2. \begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases} :$$

5. Самостійна робота.

I варіант

Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера

$$1. \begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ 7x + 4y = 8 \end{cases} \qquad 2. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

II варіант

Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера

$$1. \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 5y = 16 \end{cases} \qquad 2. \begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + x_3 = 4; \\ 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 3; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases}$$

6. Підведення підсумків заняття.

7. Домашнє завдання:

Бубняк Т.І. Вища математика: Навч. посібник. – Львів., 2004. – стор. 27,
Завдання 3 (2).