Практичне заняття № 3.

Тема: Метод Гаусса та його застосування.

Мета: навчитися зводити матрицю до ступінчастого вигляду методом елементарних перетворень; набути навичок і вмінь розв’язувати системи лінійних рівнянь допомогою методу Гаусса, ознайомитися з моделлю багатогалузевої економіки Леонтьєва та її застосуванням до економічних задач.

1. **Організаційний момент**
2. **Актуалізація опорних знань:** усне опитування

- Що наз.оберненою матрицею? Сформулюйте терему про існування оберненої матриці.
- Що називається рангом матриці? Які методи є для знаходження рангу матриці?
- В чому полягає метод елементарних перетворень для знаходження рангу матриці?
- Дайте означення системи m лінійних рівнянь з n невідомими.
- Яка система лінійних рівнянь наз. сумісною (несумісною), визначеною (невизначеною)?
- Які методи розв’язування систем лінійних рівнянь ви знаєте?
- Сформулюйте теорему Кронекера-Капеллі.
- В чому полягає метод Гаусса?

3. **Мотивація навчання**: повідомлення теми й мети заняття
4. **Розвязування вправ.**

План практичного заняття

1. **Зведення матриці до ступінчастого вигляду за допомогою елементарних перетворень.**
2. **Розв’язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса.**
3. **Модель багатогалузевої економіки Леонтьєва.**

Термінологічний словник ключових понять

Система m лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – це система виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Коефіцієнти **біля невідомих** – це числа a_{ij}, ($i=1,2,\ldots m;\ j=1,2,\ldots,n$).

Вільні члени системи – *це* числа b_i .

Однорідна система – це система рівнянь у якої всі вільні члени дорівнюють нулю. В іншому випадку вона називається ***неоднорідною***.

Неоднорідна система – це система рівнянь у якої хоча б один вільний член відмінний від нуля.

Розв'язок системи ЛР – це впорядкований набір n чисел $\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$, якщо при підстановці замість невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ усі рівняння системи перетворюються в тотожності.

Сумісна система ЛР – це система яка має хоча б один розв'язок.

Несумісна СЛР – це система яка не має жодного розв'язку.

Визначена СЛР – це сумісна система яка має єдиний розв'язок.

Невизначена СЛР – це сумісна система яка має більше ніж один розв'язок.

Ранг матриці А – це найбільший порядок відмінного від нуля її мінора. Ранг матриці А прийнято позначати *Rg(A)* або *rang A*.

Метод послідовного виключення невідомих, або метод Гауса ґрунтується на елементарних перетвореннях системи рівнянь:

1) Множення деякого рівняння на відмінне від нуля число,
2) Додавання до деякого рівняння системи іншого рівняння, помноженого на деяке число,
3) Перестановка рівнянь.

Теорема Кронекера-Капеллі (***про існування розв'язку системи лінійних рівнянь***). Для того щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг її основної матриці дорівнював рангу розширеної матриці. Якщо ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці і дорівнює числу невідомих, то система має єдиний розв'язок. Якщо ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці, але менший числа невідомих, то система має безліч розв'язків.

Завдання для практичного виконання:

1. Зведення матриці до ступінчастого вигляду за допомогою елементарних перетворень.

Приклад 1. Звести матрицю до ступінчастого вигляду за допомогою елементарних перетворень:

$$1.\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix},\quad 2.\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix},\quad 3.\ \left(\begin{array}{cccc|} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & -7 \end{array}\right)$$

2. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса.

Приклад 2. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 2 \end{cases}.$$

Розв'язання.

До другого рівняння додамо перше, помножене на (-4), до третього додамо перше, помножене на (-3), одержуємо:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ \quad -9x_2 - 18x_3 = -3 \\ \quad -3x_2 - 6x_3 = -1 \end{cases}.$$

Ділимо друге рівняння на (-3), а третє множимо на (-1), одержуємо:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ \quad 3x_2 + 6x_3 = 1 \\ \quad 3x_2 + 6x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ \quad 3x_2 + 6x_3 = 1 \end{cases}.$$

Нехай x_3- вільне невідоме, тоді

$$x_2 = \frac{1-6x_3}{3}, \quad x_1 = 1-3x_2-5x_3 = 1-1+6x_3-5x_3 = x_3.$$

Отже, загальним розв’язком розглядуваної системи є така сукупність значень невідомих:

x_3- вільне невідоме

$$x_2 = \frac{1-6x_3}{3}, \quad x_1 = x_3.$$

Якщо надати вільному невідомому деяке конкретне значення, то одержимо частинний розв’язок. Наприклад, $x_3=1$, тоді $x_2=-5/3$, $x_1=1$.

Отже, впорядкована трійка чисел (1, -5/3, 1) є частинним розв’язком розглядуваної системи лінійних рівнянь.

Приклад 3. Розв’язати систему рівнянь за допомогою теореми Кронекера—Капеллі.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5; \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1; \\ 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -7. \end{cases}$$

Розв’язання.

Запишемо головну і розширену матриці системи рівнянь і знайдемо їх ранги за допомогою елементарних перетворень.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -3 & 5 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

З остаточного вигляду матриці випливає, що найвищий порядок мінора, який можна утворити для обох матриць, дорівнює 2. Тобто, $r(A) = r(\overline{A}) = 2$. Система рівнянь сумісна. Серед відмінних від нуля мінорів другого порядку оберемо, наприклад, мінор $\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$, тим самим переводячи невідомі x_3, x_4 в розряд головних, а x_1, x_2 — в розряд вільних. Відкинемо в системі рівнянь ті рівняння, які відповідають рядкам головної матриці, що занулилися. Одержимо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} 5x_3 - 7x_4 = 17 + 5x_2; \\ -2x_3 + 3x_4 = -6 - x_1 - 2x_2. \end{cases}$$

Цю систему рівнянь можна розв'язувати або за правилом Крамера, або методом оберненої матриці, тому що $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Побудуємо $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ і одержимо розв'язок $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 + 5x_2 \\ -6 - x_1 - 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 - 7x_1 + x_2 \\ 4 - 5x_1 \end{pmatrix}$, або $x_3 = 9 - 7x_1 + x_2$; $x_4 = 4 - 5x_1$, який є загальним розв'язком системи рівнянь. Надаючи вільним невідомим значень $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, матимемо один з можливих частинних розв'язків (1; 0; 2; –1).

Приклад 4. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - 1x_2 + x_3 + x_4 = 9 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 17 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 7x_4 = -4 \end{cases}$$

Розв'язання.

Випишемо розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 9 \\ 2 & -3 & 3 & 1 & 17 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & -3 & -7 & -4 \end{array}\right)$$

Поміняємо місцями перший та третій рядки матриці.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 6 \\ 2 & -3 & 3 & 1 & 17 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & -3 & -7 & -4 \end{array}\right).$$

До другого та третього рівняння додамо перше рівняння помножене на (-2), , а до четвертого - додамо перше помножене на (-1).

Отримаємо:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -6 & -10 \end{array}\right)$$

Поміняємо місцями другий і третій рядки матриці.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & -6 & -10 \end{array}\right)$$

До третього рядка матриці додамо другий рядок, а до четвертого – додамо другий помножений на (-2). Отримаємо:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 8 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -8 & -12 & -4 \end{array}\right)$$

До четвертого рядка додамо третій.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 8 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -2 \end{array}\right)$$

Поділимо третій рядок на 8, а четвертий на (-6). Отримаємо:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{array}\right).$$

З останнього рівняння знаходимо невідому x_4: $x_4 = \frac{1}{3}$.

З третього рівняння знаходимо невідому x_3:

$$x_3 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}x_4 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0.$$

З другого рівняння отримаємо:

$$x_2 = -3 - 3x_4 - 3x_3 = -3 - 3\cdot\frac{1}{3} - 3\cdot 0 = -3 - 1 = -4.$$

З першого рівняння знаходимо:

$$x_1 = 6 + 1x_4 + 1x_3 + 1x_2 = 6 + 1\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot 0 + 1\cdot(-4) = 6 + \frac{1}{3} - 4 = 2\frac{1}{3}$$

Отже, $x_1 = 2\frac{1}{3},\ x_2 = -4,\ x_3 = 0,\ x_4 = \frac{1}{3}.$

Відповідь: $x_1 = 2\frac{1}{3},\ x_2 = -4,\ x_3 = 0,\ x_4 = \frac{1}{3}.$

3. Модель багатогалузевої економіки Леонтьєва.

Ми познайомилися з методами розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Знання цих методів знадобляться при розв'язанні прикладних економічних задач.

Означення 1. Рівняння вигляду $x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i\ (i = 1,2,...,n)$ називаються ***співвідношеннями балансу***, де x_i – об'єми валового продукту *i*-тої галузі для невиробничого споживання, x_{ij} – об’єм продукції i-тої галузі, що споживаються в процесі виробництва j-тою галуззю $(i=1,2,...,n)$.

Співвідношення балансу можуть бути записані:

а) у вигляді

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i \ (i=1,2,...,n),$$

де $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$ $(i, j=1,2,...,n)$ – коефіцієнти прямих витрат, які вказують на витрати продукції i-тої галузі на виробництво одиниці продукції j-тої галузі;

б) у матричному вигляді

$$X=AX+У \text{ або } (E\text{-}A)X=У,$$

$$\text{де } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix},$$

X – вектор валового випуску, *У* – вектор кінцевого продукту, *A* – матриця прямих витрат.

Головна задача міжгалузевого балансу полягає у знаходженні такого вектора валового випуску *X*, який при відомій матриці прямих витрат *A* забезпечує заданий вектор кінцевого продукту *У*.

Вектор *X* валового випуску знаходиться за формулою:

$$X=(E\text{-}A)^{-1}\ У=SУ,$$

де матриця $S=(E\text{-}A)^{-1}$ – називається матрицею повних витрат, кожен елемент s_{ij} якої показує величину валового випуску продукції i-тої галузі, яка необхідна для забезпечення випуску одиниці кінцевого продукту j-тої галузі $y_j = 1$ $(j=1,2,...,n)$.

Матриця $A\geq0$ називається ***продуктивною***, якщо для будь-якого вектора $У\geq0$ існує розв’язок $X\geq0$ рівняння.

Означення 2. Чистою продукцією галузі називається різниця між валовою продукцією цієї галузі і витратами продукції всіх галузей на виробництво цієї галузі.

Скористаємося наведеними означеннями для розв’язання практичних задач.

Приклад 5. В таблиці 1 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 1

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь 1	0,4	0,35	400
	Галузь 2	0,2	0,15	300

Знайти:

1) плановані об'єми валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;

2) необхідний об'єм валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 10 %, а другої – на 30 %.

Розв'язання:

1) запишемо матрицю коефіцієнтів прямих витрат A і вектор кінцевої продукції $У$:

$$A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,35 \\ 0,2 & 0,15 \end{pmatrix}, \quad У = \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Зауважимо, що матриця продуктивна, тому що всі її елементи додатні та сума елементів в кожному рядку і в кожному стовпці менше одиниці.

Щоб знайти матрицю повних витрат, знайдемо матрицю E-A:

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,4 & 0,35 \\ 0,2 & 0,15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,35 \\ -0,2 & 0,85 \end{pmatrix}$$

Звідси матриця повних витрат $S=(E\text{-}A)^{-1}$ знаходиться за правилом знаходження оберенеої матриці

$$\det(E - A) = \begin{vmatrix} 0,6 & -0,35 \\ -0,2 & 0,85 \end{vmatrix} = 0,51 - 0,07 = 0,44;$$

$$(E - A)^T = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,2 \\ -0,35 & 0,85 \end{pmatrix};$$

$$A_{11}^T = 0,85; \quad A_{12}^T = 0,35; \; A_{21}^T = 0,2; \; A_{22}^T = 0,6;$$

$$S = (E - A)^{-1} = \frac{1}{0,44}\begin{pmatrix} 0,85 & 0,35 \\ 0,2 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,93 & 0,80 \\ 0,57 & 1,36 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо вектор валового продукту X за формулою $X=SУ$

$$X = SY = \begin{pmatrix} 1,93 & 0,80 \\ 0,57 & 1,36 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1012 \\ 636 \end{pmatrix}.$$

Перший рядок матриці X відповідає галузі 1, а другий – галузі 2. Знайдемо міжгалузеві підстановки за формулою $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j} \Rightarrow x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j$:

$$x_{11} = a_{11} \cdot x_1 = 0,4 \cdot 1012 = 404,8;$$

$$x_{12} = a_{12} \cdot x_2 = 0,35 \cdot 636 = 222,6;$$

$$x_{21} = a_{21} \cdot x_1 = 0,2 \cdot 1012 = 202,4;$$

$$x_{22} = a_{22} \cdot x_2 = 0,15 \cdot 636 = 95,4.$$

Чиста продукція галузі дорівнює різниці між валовою продукцією цієї галузі і витратами продукції всіх галузей на виробництво цієї галузі.

Отже, витрати продукції всіх галузей на виробництво:

– першої галузі

$$x_{11} + x_{21} = 404,8 + 202,4 = 607,2$$

– другої галузі

$$x_{12} + x_{22} = 222,6 + 95,4 = 318,0.$$

Остаточно маємо чисту продукцію

- першої галузі: 1012-607,2=404,8;
- другої галузі: 636-318=318.

Всі отримані результати зведемо в таблицю 2:

Таблиця 2

Галузь		Споживання		Кінцева продукція	Валова продукція
		Галузь 1	Галузь 2		
Виробництво	Галузь 1	404,8	222,6	400	1012
	Галузь 2	202,4	95,4	300	636
Чиста продукція		404,8	318		
Валова продукція		1012	636		

2) Знайдемо вектор кінцевого споживання *У*, з урахуванням того, що кінцеве споживання першої галузі збільшиться на 10 %, а другої – на 30 %:

$$У=\begin{pmatrix}400\cdot 1{,}1\\300\cdot 1{,}3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}440\\390\end{pmatrix}$$

Останнє дає можливість знайти вектор валового випуску *X*, який при відомій матриці прямих витрат *A* забезпечує заданий вектор кінцевого продукту *У*.

Скористаємося формулою *X*=*SУ*:

$$X=SY=\begin{pmatrix}1{,}93 & 0{,}80\\0{,}57 & 1{,}36\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}440\\390\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}849{,}2+312\\250{,}8+530{,}4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1161{,}2\\781{,}2\end{pmatrix}.$$

5. Підведення підсумків заняття.

6. Домашнє завдання:

Бубняк Т.І. Вища математика: Навч.посібник. – Львів.,2004. – стор. 27, Завдання 3 (1).

Приклад. Розв’язати системи лінійних рівнянь методом Гаусса:

$$1.\ \begin{cases}5x_1-6x_2+4x_3=3;\\3x_1-3x_2+2x_3=2;\\4x_1-5x_2+2x_3=1.\end{cases}\qquad 3.\ \begin{cases}x_2-3x_3+4x_4=-5\\x_1-2x_3+3x_4=-4\\3x_1+2x_2-5x_4=12\\4x_1+3x_2-5x_3=5\end{cases}$$