Практичне заняття № 4.

Тема: Обчислення елементів трикутника за допомогою системи координат.

Мета: закріпити теоретичні знання з теми «Лінія на площині. Різні види рівнянь прямої на площині», набути навички і вміння по обчисленню елементів трикутника за допомогою формул аналітичної геометрії

1. **Організаційний момент**
2. **Актуалізація опорних знань:** усне опитування

- Дайте визначення декартових координат точки: на прямій, на площині, в просторі.
- Які основні задачі розв’язуються за допомогою метода координат?
- Охарактеризуйте полярну систему координат.
- Який існує зв’язок між полярною і декартовою системами координат?
- Що називається рівнянням лінії на площині?
- Що називається напрямним вектором прямої?
- Які рівняння прямої ви знаєте?
- Вивести параметричні та канонічні рівняння прямої.
- Вивести рівняння прямої у відрізках на осях та загальне рівняння прямої.
- Як знайти кут між двома прямими?
- Який існує зв'язок між загальними рівняннями двох паралельних прямих, перпендикулярних прямих?
- Як знайти точку перетину двох прямих?
- Формула відстані від точки до прямої.

3. **Мотивація навчання**: повідомлення теми й мети заняття
4. **Розв'язування вправ.**

План практичного заняття

Розв'язування задач із застосуванням методу координат:
1. **Визначення довжин сторін трикутника,**
2. **Знаходження рівнянь сторін трикутника та їх кутових коефіцієнтів,**
3. **Обчислення кутів трикутника,**
4. **Знаходження рівнянь та довжин висот і медіан трикутника**
5. **Обчислення площі трикутника**

Термінологічний словник ключових понять

Рівняння лінії l, яка задана на площині відносно певної системи координат – рівняння $F(x,\ y)=0$, якщо його задовольняють координати x і y кожної точки лінії l і не задовольняють координати x і y жодної точки, яка не лежить на цій лінії.

Загальне рівняння прямої. – $Ax+By+C=0$ (1) за умови, що коефіцієнти A і B одночасно не дорівнюють нулю.

Векторне рівняння – це рівняння прямої, яка проходить через задану точку $M(x_0,y_0)$ паралельно вектору $q(m,n)$:

$$r=r_0+t\,q,$$

де r- радіус - вектор будь-якої точки $M(x,y)$ прямої, r_0 – радіус-вектор точки $M(x_0,y_0)$, t- параметр, що набуває дійсних значень, вектор q – напрямний вектор, а його координати напрямні коефіцієнти прямої.

Параметричне рівняння прямої: $–x=x_0+mt,\ \ y=y_0+nt.$

Канонічне рівняння прямої: $-\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$.

Рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1(x_1,y_1)$ *і* $M_2(x_2,y_2)$–

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Рівняння прямої у відрізках на осях – $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$**,** де a і b – відповідно абсциса і ордината точок перетину прямої з осями Оx і Оy.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом – $y=kx+b$, де $k=tg\alpha$ – кутовий коефіцієнт, який дорівнює тангенсу кута нахилу прямої до додатного напрямку осі Ox, b – ордината точки перетину прямої з віссю Oy.

Рівняння прямої, яка проходить через задану точку **M(x_0,y_0)** ***із заданим кутовим коефіцієнтом***– $y-y_0=k(x-x_0)$, де $k=tg\alpha$ – кутовий коефіцієнт прямої.

Рівняння прямої, яка проходить через задану точку **M(x_0,y_0) із заданим нормальним вектором** ***n(A;B)***– $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$.

Перетин двох прямих – *розв'язок* системи рівнянь:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C=0 \\ A_2x+B_2y+C=0 \end{cases}$$

Умова паралельності 2-х прямих – $A_1/A_2=B_1/B_2$. або $k_1=k_2$.

Умова перпендикулярності 2-х прямих – $A_1A_2+B_1B_2$.=0 або $k_1k_2=-1$.

Відстань від точки (x_0,y_0) до прямої, яка задана загальним рівнянням Ax+By+C=0 – $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Кут між двома прямими – $\cos\alpha=\dfrac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$ або $tg\alpha=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$.

Завдання для практичного виконання:

Приклад 1. Пряму задано рівнянням $3x-5y+15=0$. Перевірити, які з точок A (– 2, 3), B (0, 3), C (5, 6), належать заданій прямій, знайти її рівняння з кутовим коефіцієнтом і у відрізках на осях.

Розв'язання:

Для перевірки того, чи лежать точки A, B, C на прямій, підставимо їхні координати в рівняння прямої:

$$A:\ 3\,(-2)-5\cdot 3+15\neq 0,\quad B:\ 3\cdot 0-3\cdot 5+15=0,$$
$$C:\ 3\cdot 5-5\cdot 6+15=0.$$

Таким чином, точка *A* не лежить на прямій, а точки *B* і *C* лежать на прямій.

Поділимо рівняння прямої почленно на коефіцієнт при *y*: $\frac{3}{5}x - y + 3 = 0$, а далі запишемо його у вигляді $y = \frac{3}{5}x + 3$ — рівняння з кутовим коефіцієнтом.

Поділивши рівняння почленно на вільний член:

$$\frac{3x}{15} - \frac{5y}{15} + 1 = 0, \text{ або } \frac{x}{-5} + \frac{y}{3} = 1,$$

дістанемо шукане рівняння у відрізках на осях.

Приклад 2. Паралельні прямі проходять відповідно через точки *O*(0, 0) і *M*(1, 3). Знайти їх рівняння, коли відомо, що відстань між ними дорівнює $\sqrt{5}$.

Розв'язання:

Якщо прямі паралельні, то їх кутові коефіцієнти рівні між собою, тому згідно з (2.15) рівняння шуканих прямих можна записати у вигляді $y = kx,\ y - 3 = k(x-1)$. Візьмемо довільну точку, що лежить на першій прямій, наприклад $(1, k)$. Тоді згідно з формулою для відстані точки до прямої запишемо:

$\sqrt{5} = \frac{|k - k - k + 3|}{\sqrt{1 + k^2}}$, звідки знайдемо $k_1 = -2,\ k_2 = \frac{1}{2}$. Рівняння прямих: $y = -2x;\ 2x + y - 5 = 0$ або $y = \frac{1}{2}x;\ x - 2y + 5 = 0.$

Приклад 3. Дано вершини трикутника $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,,y_2)$, $A(x_3,\ y_3)$. Знайти:

1) довжини сторін трикутника;
2) рівняння сторін і їх кутові коефіцієнти;
3) внутрішній кут A в радіанах з точністю до 0,001;
4) рівняння висот, які проведені через вершини C, B і точку їх перетину;
5) рівняння медіани, яка проведена через вершину C;
6) довжину висоти, яка проведена з вершини C;
7) записати систему лінійних нерівностей, які визначають трикутник ABC.

Зробити малюнок.

A(-1; 1), B(5; 4), C(2; 5)

Розв'язання:

1. Відстань d між двома точками $M_1(x_1,\ y_1)$ і $M_2(x_2,,y_2)$ знаходиться за формулою:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad (1)$$

Підставивши в цю формулу координати точок A, B і C, отримаємо довжини сторін трикутника AB, BC і AC:

$$AB=\sqrt{(5-(-1))^2+(4-1)^2}=\sqrt{36+9}=\sqrt{45}=3\sqrt{5},$$

$$BC=\sqrt{(2-5)^2+(5-4)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10},$$

$$AC=\sqrt{(2-(-1))^2+(5-1)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5.$$

2. Рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(x_1,\ y_1)$ і $M_2(x_2,,y_2)$, має вигляд:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (2)$$

Підставивши в формулу (2) координати точок A і B, запишемо рівняння сторони AB:

$$\frac{x-(-1)}{5-(-1)}=\frac{y-1}{4-1} \qquad \frac{x+1}{6}=\frac{y-1}{3}$$

$3(x+1)=6(y-1)$, $\quad x+1=2y-2$, $\quad x-2y+3=0$ (AB)

Для знаходження кутового коефіцієнта k_{AB} прямої AB розв'яжемо отримане рівняння відносно y: $\quad y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

звідси $k_{AB}={}^1/_2$.

Підставимо в формулу (2) координати точок A і C і знайдемо рівняння прямої AC:

$$\frac{x-(-1)}{2-(-1)}=\frac{y-1}{5-1} \qquad \frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{4}$$

$4(x+1)=3(y-1)$, $\quad 4x+4=3y-3$, $\quad 4x-3y+7=0$ або $y=\frac{4}{3}x+\frac{7}{3}$ (AC),

звідси $k_{AC}={}^4/_3$.

Аналогічно знаходимо рівняння прямої BC:

$$\frac{x-5}{2-5}=\frac{y-4}{5-4} \qquad \frac{x-5}{-3}=\frac{y-4}{1}$$

$$x\text{-}5=-3(y\text{-}4), \quad x+3y\text{-}1=0 \ \text{ або } \ y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3} \quad (BC),$$

звідки $k_{BC}=-{}^{1}/_{3}$.

3. Кут α між двома прямими, кутові коефіцієнти яких дорівнюють k_1 і k_2. визначається за формулою:

$$tg\alpha=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2} \qquad (3)$$

Кут A, утворений прямими AB і AC, знайдемо за формулою (3) підстановкою

$k_1=k_{AB}={}^{1}/_{2}$, $k_2=k_{AC}={}^{4}/_{3}$.

$$tgA=\frac{\frac{4}{3}-\frac{1}{2}}{1+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{\frac{8}{6}-\frac{3}{6}}{1+\frac{4}{6}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{10}{6}}=\frac{1}{2}=0{,}5.$$

З точністю до 0,001 кут A трикутника ABC буде дорівнювати:

$$\angle A=\text{arctg}0{,}5\approx 0{,}464\,рад.$$

4. Знайдемо рівняння висот трикутника, які проведені через вершини C і B та координати точки їх перетину.

Оскільки висота CD перпендикулярна стороні AB, то кутові коефіцієнти цих прямих обернені за величиною і протилежні за знаком, тобто

$$k_{CD}=-1/k_{AB}=-1/\,{}^{1}/_{2}=-2.$$

Рівняння прямої, що проходить через дану точку $M_1(x_1,y_1)$ в заданому коефіцієнтом k напрямі, має вигляд:

$$y-y_1=k(x-x_1) \qquad (4)$$

Підставивши в (4) координати точки C(2,5) і кутовий коефіцієнт $k_{CD}=-2$. отримаємо рівняння висоти CD:

$$y\text{-}5=-2(x\text{-}2), \qquad y\text{-}5=-2x+4,$$

$$2x+y-9=0 \ \ (CD). \qquad (5).$$

Аналогічно знаходимо рівняння висоти BK, яка перпендикулярна стороні трикутника AC. Кутові коефіцієнти цих прямих обернені за величиною і протилежні за знаком, тобто

$$k_{BK}=-1/k_{AC}=-1/\,^4/_3=-^3/_4.$$

Підставивши в (4) координати точки B(5,4) і кутовий коефіцієнт $k_{BK}=-^3/_4$. отримаємо рівняння висоти BK:

$$y-4=-^3/_4(x-5), \qquad y-4=-^3/_4x+^{15}/_4,$$

$$^3/_4x+y-^{31}/_4=0 \quad \text{(BK)}.$$

Знайдемо координати точки H перетину висот CD і BK трикутника. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x+y-9=0 \\ \frac{3}{4}x+y-\frac{31}{4}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-2x+9 \\ y=-\frac{3}{4}x+\frac{31}{4} \end{cases} \Rightarrow -2x+9=-\frac{3}{4}x+\frac{31}{4}$$

$$-2x+\frac{3}{4}x=\frac{31}{4}-9$$

$$-\frac{1}{4}x=-\frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad x=5, \;\; y=-2\cdot 5+9=-1$$

Отже H (5, -1).

5. Щоб записати рівняння медіани CM, визначимо спочатку координати точки M, яка є серединою сторони AB, використовуючи формули ділення відрізка на дві рівні частини:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}. \qquad (6)$$

Відповідно, $x_M=\frac{-1+5}{2}=2, \quad y_M=\frac{1+4}{2}=2{,}5.$

Отже, M (2; 2,5). Рівняння медіани CM запишемо, скориставшись формулою (2):

$$\frac{x-2}{2-2}=\frac{y-2{,}5}{5-2{,}5}$$

$$2{,}5(x-2)=0(y-2{,}5), \qquad 2{,}5x-5=0, \qquad x-2{,}5=0 \quad \text{(CM)}$$

6. Для відшукання довжини висоти скористаємося формулою знаходження відстані від точки $M(x_0;\, y_0)$ до прямої $Ax+By+C=0$:

$$d(M,l)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (7)$$

Підставивши координати точки С (2; 5) і коефіцієнти при невідомих в рівняння прямої АВ: x-2y+3=0, одержимо:

$$d(C, AB) = \frac{|2 - 2\cdot 5 + 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

7. Складемо систему лінійних нерівностей, які визначають трикутник АВС.

Множина точок трикутника АВС є перетином трьох площин, перша з яких обмежена прямою АВ і містить точку С, друга обмежена прямою ВС і містить точку А, а третя обмежена прямою АС і містить точку В.

Для отримання нерівності, що визначає півплощину, обмежену прямою АВ і містить точку С, підставимо в рівняння прямої АВ (x-2y+3=0) координати точки С (2; 5):

$$1\cdot 2-2\cdot 5+3=-5<0.$$

Тому шукана нерівність має вигляд: $x-2y+3\le 0$.

Для складання нерівності, що визначає півплощину, обмежену прямою ВС і містить точку А, підставимо в рівняння прямої ВС (x+3y-1=0) координати точки А (-1; 1). Маємо

$$1\cdot(-1)+3\cdot 1-1=1>0.$$

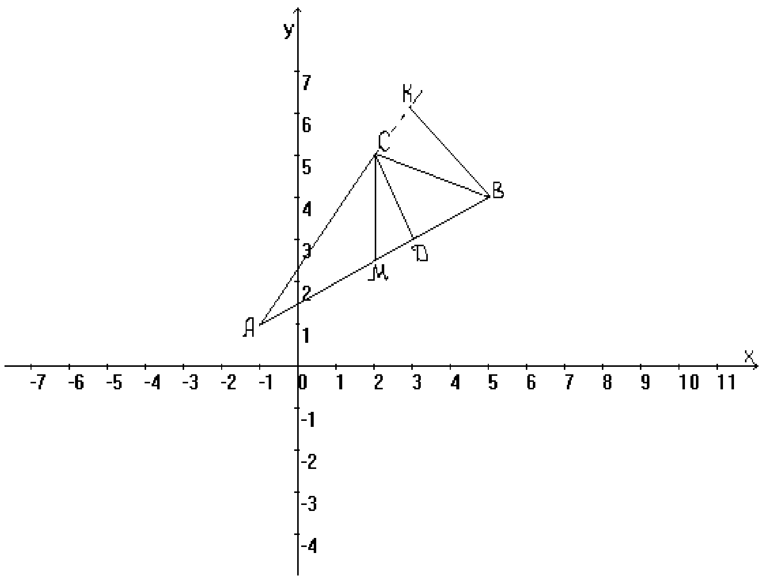
Шукана нерівність буде: $x+3y-1\ge 0$.

Аналогічно складаємо нерівність, що визначає півплощину, обмежену прямою АС і містить точку В. Підставивши в рівняння прямої АС(4x-3y+7=0) координати точки В(5; 4) отримаємо:

$$4\cdot 5-3\cdot 4+7=15>0.$$

Шукана нерівність буде: $4x-3y+7\ge 0$.

Отже, множина точок трикутника АВС визначається системою нерівностей



$$\begin{cases} x - 2y + 3 \le 0 \\ x + 3y - 1 \ge 0 \\ 4x - 3y + 7 \ge 0 \end{cases}.$$

Зробимо малюнок.

В декартовій прямокутній системі координат *xOy* зобразимо трикутник АВС з висотами CD, ВК і медіаною СМ.

5. Підведення підсумків заняття.

6. Домашнє завдання:

Бубняк Т.І. Вища математика: Навч.посібник. – Львів.,2004. – стор. 55, Завдання 7,11,15. Індивідуальні завдання.