Практичне заняття № 5.

Тема: Криві другого порядку. Пряма і площина в просторі.

Мета: закріпити теоретичні знання з тем: «Криві II порядку», «Пряма і площина в просторі»; набути навички і вміння по складанню рівнянь кола, еліпса, гіперболи, параболи, площини, прямих в просторі. Навчитися по зовнішньому вигляду рівняння II порядку визначати тип кривої та її властивості. Навчитися досліджувати взаємне розташувань прямих і площин.

1. **Організаційний момент**
2. **Актуалізація опорних знань:** усне опитування

- Що називається лінією другого порядку?
- Які криві другого порядку ви знаєте?
- Що називається колом? Виведіть рівняння кола з центром в точці $O_1(a,b)$ і радіусом R.
- Що називається еліпсом? Виведіть канонічне рівняння еліпса.
- Що таке фокус еліпса, мала, велика півосі, ексцентриситет еліпса?
- Який існує зв'язок між еліпсом і колом. Що таке ексцентриситет еліпса?
- Що називається гіперболою? Від чого залежить форма гіперболи?
- Запишіть канонічне рівняння гіперболи. Виведіть рівняння асимптот гіперболи.
- Дайте означення параболи. Що таке директриса параболи?
- У чому полягає характерна особливість директрис еліпса, гіперболи і параболи?
- Що називається рівнянням поверхні в просторі?

- Які рівняння площини ви знаєте?
- Як знайти кут між двома площинами?
- Який існує зв'язок між загальними рівняннями двох паралельних площин, перпендикулярних площин?
- Як знайти відстань від точки до площини?
- Які види рівнянь прямої в просторі ви знаєте?
- Сформулюйте умови паралельності і перпендикулярності прямої і площини.
- За якою формулою знаходиться кут між прямою і площиною?

3. **Мотивація навчання**: повідомлення теми й мети заняття
4. **Розв’язування вправ.**

План практичного заняття

1. **Знаходження рівнянь кола, еліпса, гіперболи і параболи.**
2. **Приведення заданих рівнянь кривих II порядку до канонічного вигляду.**
3. **Дослідження взаємних розташувань прямих і площин.**
4. **Визначення типу кривих за заданим рівнянням**

Термінологічний словник ключових понять

Рівняння лінії l, яка задана на площині відносно певної системи координат – рівняння $F(x,\ y)=0$, якщо його задовольняють координати x і y кожної точки лінії l і не задовольняють координати x і y жодної точки, яка не лежить на цій лінії.

Рівняння поверхні в просторі OXYZ – рівняння $F(x,y,z)=0$, яке пов'язує змінні *x, y, z* так, що координати довільної точки даної поверхні задовольняють це рівняння і не задовольняють координати тих точок, що не лежать на цій поверхні.

Загальне рівняння площини – $Ax+By+Cz+D=0$, де *A,B,C*- координати нормального вектора.

Рівняння площини, яка проходить через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ з відомим нормальним вектором $\overline{N}(A,B,C)$ – $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

Рівняння площини через три точки $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ ***і*** $C(x_3,y_3,z_3)$, ***які не лежать на одній прямій*** – $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ x-x_3 & y-y_3 & z-z_3 \end{vmatrix}=0$.

Рівняння площини у відрізках на осях – $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Рівняння прямої в просторі, що проходить через дві точки – $\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$.

Пряма в просторі може бути задана як перетин двох площин

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

Кут між прямою $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ ***і площиною*** $Ax+By+Cz+D=0$ – скалярний добуток векторів $\overline{N}(A,B,C)$ і $\overline{S}(m,n,p)$ – $\sin\theta=\frac{\overline{N}\cdot\overline{S}}{|\overline{N}|\cdot|\overline{S}|}=\frac{Am+Bn+Cp}{|\overline{N}|\cdot|\overline{S}|}$.

Умова паралельності прямої і площини – $\overline{N}\perp\overline{S}\Rightarrow Am+Bn+Cp=0$.

Умова перпендикулярності прямої і площини – $\overline{N}\parallel\overline{S}\Rightarrow\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$.

Рівняння лінії другого порядку на площині в загальному вигляді –

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0.$$

Коло – множина точок, що містяться на однаковій відстані від заданої точки — центра.

Канонічне рівняння кола – $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$, де (a, b) — координати центра кола, R — його радіус.

Еліпс – множина точок площини, для яких сума відстаней від двох заданих точок, що називаються *фокусами*, є величина стала й така, що дорівнює $2a$ і більша, ніж відстань між фокусами.

Канонічне рівняння еліпса – $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, де $b^2 = a^2 - c^2$.

Ексцентриситет еліпса – це відношення $\varepsilon=\frac{c}{a}$; за означенням $c < a$ і $\varepsilon\in[0, 1)$.

Геометричний зміст ексцентриситету – характеризує *ступінь витягнутості* еліпса. При $\varepsilon=0\Rightarrow a=b$ маємо коло, якщо ε наближається до одиниці, то еліпс витягується вздовж осі Ox

Гіпербола – *м*ножина точок площини, для яких модуль різниці відстаней від двох заданих точок, що називаються фокусами, є величиною сталою, яка дорівнює $2a$ і менша за відстань між фокусами.

Канонічне рівняння гіперболи – $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, де $b^2 = c^2 - a^2$.

Асимптоти гіперболи – рівняння прямих $y=\pm\frac{b}{a}x$.

Ексцентриситет гіперболи – $\varepsilon=\frac{c}{a}$, але $c > a$ і $\varepsilon > 1$. Ексцентриситет характеризує ступінь нахилу віток гіперболи до осі Ox.

Директриси еліпса і гіперболи – дві прямі, рівняння яких $x=-\frac{a}{\varepsilon}$; $x=\frac{a}{\varepsilon}$,

Парабола – *м*ножина точок площини, що містяться на однаковій відстані від даної точки фокуса і даної прямої, яка не проходить через фокус і називається *директрисою*.

Канонічне рівняння параболи – $y^2 = 2px$.

Класифікація кривих другого порядку:

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ - еліпс,

2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ - пара уявно заданих прямих, що перетинаються,

3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ - уявний еліпс,

4) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ - гіпербола,

5) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ - пара прямих, що перетинаються,

6) $y=ax^2$ - парабола,

7) $x^2=a^2$ - пара паралельних прямих,

8) $x^2=-a^2$ - пара уявних паралельних прямих

9) $x^2=0$ - пара співпадаючих прямих.

Алгоритм визначення типу кривої за її рівнянням.

Щоб визначити тип кривої другого порядку $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ потрібно це рівняння звести до канонічного вигляду. Цей процес включає в себе два етапи:

І етап. **Перенесення початку координат.**

Використовується тоді коли в заданому рівнянні присутній доданок Bxy. Щоб його позбутися потрібно перейти до нової системи координат. Для цього:

1) Складаємо характеристичне рівняння:

$$\lambda^2-\lambda I_1+I_2=0, \text{ де } I_1=A+C, \quad I_2=\begin{vmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{vmatrix}.$$

2) Знаходимо корені характеристичного рівняння, т/б λ_1, λ_2.

3) Знаходимо кут повороту системи координат

$$tg\alpha = \frac{\lambda_1 - A}{\frac{B}{2}}.$$

Знаходимо координати x та y в новій системі координат:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{aligned}, \text{де } \sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}, \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}.$$

4) Записуємо рівняння кривої в новій системі координат і згруповуємо, щоб позбутися доданків першого степеня. Отримаємо рівняння:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + D'x' + E'y' + F = 0.$$

6) Переходимо до етапу 2.

ІІ етап. **Спрощення рівняння виділенням повних квадратів.**

Якщо доданок Bxy в рівнянні відсутній або ми його вже позбулися, то зводимо рівняння до канонічного вигляду методом виділення повних квадратів біля невідомих x та y.

Завдання для практичного виконання:

Приклад 1. Дано еліпс $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, через точку A (1; 1) провести хорду еліпса, яка поділяється в цій точці навпіл.

Розв'язання:

Запишемо рівняння хорди, використовуючи рівняння прямої,що проходить через задану точку в заданому кутовим коефіцієнтом напрямку

$$(y - 1) = k\,(x - 1).$$

Це буде рівняння всіх хорд еліпса, що проходять через точку A. Знайдемо точки перетину цієї прямої з еліпсом, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ y - 1 = k(x-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (4 + 9k^2)x^2 + 18k(1-k)x + 9(1-k)^2 - 36 = 0 \\ y = kx + 1 - k. \end{cases}$$

За умовою задачі координати точок перетину хорди з еліпсом (x_1, y_1),

(x_2, y_2) мають задовольняти рівності: $\frac{x_1 + x_2}{2} = 1$ і $\frac{y_1 + y_2}{2} = 1$. З теореми Вієта і останньої умови маємо: $\frac{18(k-1)k}{4+9k^2} = 2$, звідки $k = -\frac{4}{9}$. Шукане рівняння хорди набирає вигляду $y - 1 = -\frac{4}{9}(x-1)$, або $4x + 9y - 13 = 0$.

Приклад 2. Записати рівняння гіперболи, яка проходить через точку A (6; 9), якщо:

1) відстань між фокусами дорівнює 8, а відстань між директрисами — 6;

2) директриси задано рівняннями $x = -3\sqrt{2}, x = 3\sqrt{2}$, а кут між асимптотами — прямий;

3) ексцентриситет дорівнює $\varepsilon = 2$, а уявна піввісь $b = 3$;

4) асимптоти задано рівнянням $y = \pm\frac{5}{3}x$.

Розв'язання:

1) Координати фокусів F_1 $(-c;\ 0)$; F_2 $(c;\ 0)$, тому з умови $2c = 8$; $c = 4$, відстань між директрисами $6 = \frac{2a}{\varepsilon}$. Звідки, враховуючи, що $\varepsilon = \frac{c}{a}$ маємо:

$a = 12$, $b = c - a = 4$. Остаточно $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$.

2) З рівнянь директрис маємо: $\frac{a}{\varepsilon} = 3\sqrt{2}$, якщо кут між асимптотами прямий, то $a = b$. Отже, з урахуванням формули $\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$ маємо $\varepsilon = \sqrt{2}$ і $a = 6$; $b = 6$. Остаточно записуємо рівняння шуканої гіперболи: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{36} = 1$.

3) З формули, застосованої вище, дістаємо $\frac{3}{a} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$, звідки $a = \sqrt{3}$. Отже, $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = 1$.

4) Точка A належить гіперболі, тому маємо: $\frac{36}{a^2} - \frac{81}{b^2} = 1$. З рівняння асимптот гіперболи випливає співвідношення $\frac{b}{a} = \frac{5}{3}$, або $b = \frac{5}{3}a$. Підставивши b в останнє співвідношення, дістанемо рівняння для знаходження a^2:

$$\frac{36}{a^2}-\frac{81\cdot 9}{25a^2}=1;\quad a^2=\frac{171}{25},\quad b^2=19.$$

Отже, $\frac{25x^2}{171}-\frac{y^2}{19}=1.$

Приклад 3. Знайти умову, за якої пряма $y = kx + b$ дотикається до параболи $y^2 = 2px$.

Розв'язання:

Парабола і пряма будуть дотикатися одна до одної, якщо система рівнянь матиме єдиний розв'язок:

$$\begin{cases} y = kx + b \\ y^2 = 2px. \end{cases}$$

Виключаючи x із рівнянь системи, дістаємо квадратне рівняння:

$$y^2-\frac{2p}{k}y+\frac{2pb}{k}=0.$$

Воно має єдиний розв'язок, якщо $D = 0$. Звідси випливає:

$$\frac{p^2}{k^2}-\frac{2pb}{k}=0\Rightarrow p(p-2bk)=0,$$

але $p \neq 0$. Отже, $p = 2bk$ — умова дотику прямої і параболи.

Приклад 4. Записати рівняння лінії центрів двох кіл $x^2 + y^2 – 6x + 8y = 0$ і $x^2 + y^2 + 2x – 12y + 1= 0$.

Розв'язання:

Знайдемо спочатку координати центрів цих двох кіл, виділивши повні квадрати:

$$x^2 – 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 = 25,\ \text{або}\ (x – 3)^2 + (y + 4)^2 = 25,$$
$$x^2 + 2x + 1 + y^2 – 12y + 36 = 36,\ \text{або}\ (x + 1)^2 + (y – 6)^2 = 36.$$

Отже, координати центра першого кола C_1 (3; – 4), а другого — C_2 (– 1; 6). Скориставшись рівнянням прямої, що проходить через дві точки, знайдемо

$$\frac{y+4}{6+4}=\frac{x-3}{-1-3}.$$

$5x + 2y - 7 = 0$ — шукане рівняння центрів кіл.

Приклад 5. Скласти рівняння площини, яка проходить через три точки $M_1(1,1,1)$, $M_2(2, 3, 4)$, $M_3(4, 3, 1)$.

Розв'язання.

Рівняння набуде вигляду:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2-1 & 3-1 & 4-1 \\ 4-1 & 3-1 & 1-1 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкривши визначник, дістанемо рівняння $6x - 9y + 4z - 1 = 0$.

Приклад 6. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-1}$ і точку $M_1(1, 1, 1)$.

Розв'язання.

Знаходимо загальні рівняння прямої

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2}, \qquad \frac{x-1}{1} = \frac{z-3}{-1}$$

або

$$2x - y = 0, \quad x + z - 4 = 0.$$

Утворимо пучок площин

$$2x - y + \lambda(x + z - 4) = 0$$

і визначимо ту з них, якій належить точка $M_1(1, 1, 1)$. Маємо

$$1 - 2\lambda = 0, \qquad \lambda = \frac{1}{2}.$$

Остаточно запишемо рівняння шуканої площини:

$$2x - y + \frac{1}{2}(x + z - 4) = 0 \Leftrightarrow 5x - 2y + z - 4 = 0.$$

Приклад 7. Знайти проекцію точки $M_0(1, 2, 3)$ на площину $2x + y + 2z - 1 = 0$.

Розв'язання.

Для розв'язання задачі достатньо з точки M_0 опустити на площину перпендикуляр і знайти точку його перетину з площиною (рис. 1).

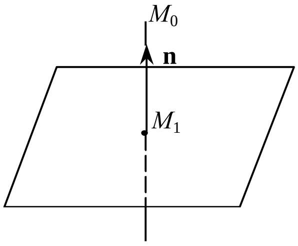


Рис. 1

Напрямний вектор прямої **s** колінеарний до вектора $\vec{n}$ нормалі до площини. Маємо $\vec{\mathbf{n}} = \{2, 1, 2\}$. Отже, рівняння перпендикуляра:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2} = t\,.$$

Підставивши вирази

$$x = 1 + 2t,\ y = 2 + t,\ z = 3 + 2t$$

у рівняння площини, дістанемо t

$$2(1+2t) + (2+t) + 2(3+2t) - 1 = 0 \Rightarrow t = -1.$$

З параметричних рівнянь прямої знаходимо координати точки проекції $M_1(x_1, y_1, z_1) -$ $x_1 = -1,\ y_1 = 1,\ z_1 = 1.$

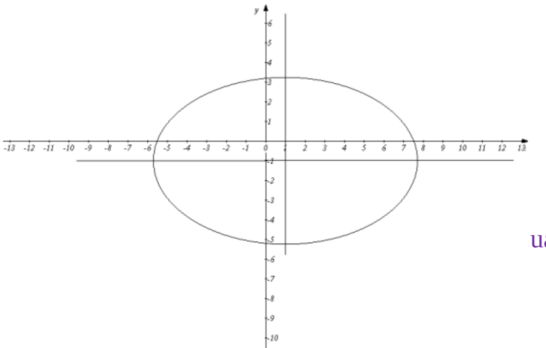
Приклад 8. Встановити тип кривих, заданих рівняннями. Привести рівняння до канонічного вигляду. Зобразити на рисунках (побудувати “старі” і “нові” осі координат)

$$2x^2 + 5y^2 - 4x + 10y - 83 = 0.$$

Розв’язання.

Так як в заданому рівнянні відсутній доданок Bxy, то зведемо це рівняння до канонічного вигляду методом виділення повних квадратів

$$2x^2 + 5y^2 - 4x + 10y - 83 = 0$$
$$2x^2 - 4x + 5y^2 + 10y - 83 = 0$$
$$2\left(x^2 - 2x\right) + 5\left(y^2 + 2y\right) - 83 = 0$$
$$2\left(x^2 - 2x + 1 - 1\right) + 5\left(y^2 + 2y + 1 - 1\right) - 83 = 0$$
$$2\left(x^2 - 2x + 1\right) + 5\left(y^2 + 2y + 1\right) - 83 - 2 - 5 = 0$$
$$2(x-1)^2 + 5(y+1)^2 = 90$$
$$\frac{(x-1)^2}{45} + \frac{(y+1)^2}{18} = 1$$



ua/

Останнє рівняння показує, що шукана крива – еліпс. Для його побудови перенесемо початок координат в точку $(1;-1)$ і побудуємо криву.

Рис.2. Еліпс

5. Підведення підсумків заняття.

6. Домашнє завдання:

Бубняк Т.І. Вища математика: Навч.посібник. – Львів.,2004. – стор. 56, Завдання 32,37,38,43,47,54. Індивідуальні завдання.