Практичне заняття № 6.

Тема: Обчислення границь. Дослідження функцій на неперервність.

Мета: закріпити теоретичні знання з теми «Границя функції та неперервність», набути навички і вміння по обчисленню границь послідовностей і функцій Навчити студентів досліджувати функції на неперервність, визначати вид точок розриву функції, схематично будувати графіки функцій

1. **Організаційний момент**
2. **Актуалізація опорних знань:** усне опитування

- Що таке функція, область визначення функції числова послідовність?
- Яка послідовність називається зростаючою (спадною)? Наведіть приклади цих послідовностей
- Що називається модулем дійсного числа? Наведіть властивості модулів.
- Що таке окіл точки x_0? Поясніть його геометричний зміст.
- Дайте означення границі функції.
- У чому полягає геометричний зміст границі функції?
- Що таке ліва і права границі функції?
- Які функції називається нескінченно великими, нескінченно малими? Сформулюйте властивості цих функцій.
- Які основні теореми про границі функцій ви знаєте?
- Напишіть першу та другу важливі границі.
- Як ви розумієте висловлення “x→a”?
- Дайте означення неперервності функції в точці. Що таке точки розриву?

- Як дослідити функцію на неперервність на відрізку?

3. **Мотивація навчання**: повідомлення теми й мети заняття

4. **Розв'язування вправ.**

План практичного заняття

1. Розв'язування вправ на функції. Обчислення границь послідовностей.
2. Обчислення границь дробово-раціональних функцій в точці і на нескінченності.
3. Обчислення границь функцій, що містять корені.
4. Розв'язання вправ на використання першої та другої визначних границь.
5. Дослідження функції на неперервність. Знаходження точок розриву функції, та визначення їх виду.

Термінологічний словник ключових понять

Функція — це така відповідність між множинами D та E, при якій кожному значенню змінної $x \in D$ відповідає одне й тільки одне значення $y \in E$.

Область визначення функції — це множина всіх значень аргументу, для яких можна обчислити значення функції.

Послідовність — це числова функція $y = f(n)$, область визначення якої є множина натурального ряду чисел.

Границя а послідовності $\boldsymbol{x_n}$ — це таке число a, для якого при довільному $\varepsilon > 0$, яким би малим воно не було, існує номер N, такий, що для всіх номерів $n > N$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$.

Нескінченно мала величина — це така послідовність α_n, для якої $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0.$

Нескінченно велика величина — це така послідовність x_n, для якої при довільному числі M $0 < M < +\infty$, яким би великим воно не було, існує номер N такий, що при всіх $n > N$ виконується нерівність $|x_n| > M$.

Границя функції — а) Число b називається *границею функції* $f(x)$ *при* $x \to a$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$, таке що при $|x - a| < \delta$ і $x \neq a$ виконується нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$ (означення границі функції «мовою $\varepsilon - \delta$»).

б) Число b називається *границею функції* $f(x)$ *при* $x \to a$, якщо для будь-якої послідовності значень аргументу $x_n,\ x_n \neq a$, що має границею число a, відповідна послідовність значень функції $f(x_n)$ має границею число b (означення границі функції «мовою послідовностей»).

Односторонні границі функції — а) Якщо при $x \to a(x < a)$ функція має границю, то ця границя називається *лівосторонньою границею функції в точці* $x = a$.

б) Якщо при $x \to a\ (x > a)$ функція має границю, то ця границя називається *правосторонньою границею* функції в точці $x = a$.

Лівостороння та правостороння границі функції в точці є односторонніми границями цієї функції.

Перша особлива границя — $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$

Друга особлива границя — $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$

Функція неперервна в точці, якщо в цій точці нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції. Функція є *неперервною на проміжку*, якщо вона неперервна в кожній точці цього проміжку.

Точка розриву функції — це точка $x = x_0$, в якій порушується хоча б одна з умов рівності $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x)$.

Точка розриву 1-го роду — а) *Точка $x = x_0$ називається точкою розриву 1-го роду* (розрив неусувний) для функції $y = f(x)$, якщо односторонні границі (зліва і справа) функції у цій точці існують, але не рівні між собою, тобто

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim_{x\to x_0+0} f(x).$$

б) *Точка $x = x_0$ називається точкою розриву 1-го роду* (розрив усувний) для функції $y = f(x)$, якщо односторонні границі функції у цій точці існують, рівні між собою, але не дорівнюють значенню функції у цій точці, або функція у цій точці не існує, тобто

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0).$$

Точка розриву 2-го роду — точка $x = x_0$ називається точкою розриву 2-го роду для функції $y = f(x)$, якщо в цій точці не існує хоча б одна з односторонніх границь (зліва чи справа).

Завдання для практичного виконання:

Приклад 1. Знайти область визначення функції $y = \frac{\ln(1+x)}{x-1}$.

Розв'язання.

Функція визначена, якщо $x-1 \neq 0$ та $1+x>0$. Таким чином, областю визначення функції є: (– 1, 1) ∪ (1, + ∞).

Приклад 2. Знайти область визначення функції

$$y = \sqrt{1-2x} + 3\arcsin\frac{3x-1}{2}.$$

Розв'язання.

Перший доданок $\sqrt{1-2x}$ набуває дійсних значень при $1-2x \geq 0$, а другий — при $-1 \leq \frac{3x-1}{2} \leq 1$. Розв'язавши здобуту систему нерівностей, знайдемо область визначення функції: $\left[-\frac{1}{3}, \ \frac{1}{2}\right]$.

Приклад 3. Визначити, яка із заданих функцій парна чи непарна:

а) $y = x^2\sqrt[3]{x} + 2\sin x$; б) $y = 2^x + 2^{-x}$; в) $y = x^2 + 5x$.

Розв'язання.

а) Оскільки $f(-x) = (-x)^2\sqrt[3]{-x} + 2\sin(-x) = \left(x^2\sqrt[3]{x} + 2\sin x\right) = -f(x)$, то функція непарна.

б) Маємо $f(-x) = 2^{-x} + 2^{-(-x)} = 2^{-x} + 2^x = f(x)$.

Функція парна.

в) Тут $f(-x) = (-x)^2 + 5(-x) = x^2 - 5x \neq \pm f(x)$.

Таким чином, функція не є ні парною, ні непарною.

Приклад 4 . Довести, що границею послідовності $x_n = \frac{2n+3}{n+5}$ є число $a = 2$.

Розв'язання.

Задамо число $\varepsilon > 0$, тоді

$$|x_n - a| = \left|\frac{2n+3}{n+5} - 2\right| = \left|\frac{2n+3-2n-10}{n+5}\right| = \left|\frac{-7}{n+5}\right| = \frac{7}{n+5}.$$

З нерівності $|x_n - a| < \varepsilon$ маємо $\frac{7}{n+5} < \varepsilon$ або $n > \frac{7}{\varepsilon} - 5$. Звідки $N = \left[\frac{7}{\varepsilon} - 5\right]$.

Приклад 5. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2-5n+6}{6-2n+7n^2}$.

Розв'язання.

$$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2-5n+6}{6-2n+7n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3\left(1+{}^{3}\!/_{n}-{}^{5}\!/_{n^2}+{}^{6}\!/_{n^3}\right)}{n^2\left({}^{6}\!/_{n^2}-{}^{2}\!/_{n}+7\right)}=\infty.$$

Приклад 6. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$.

Розв'язання.

$$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right)=$$

$$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1-0=1.$$

Приклад 7. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-7}{2n+1}\right)^{3n+17}$

Розв'язання.

Виконавши перетворення і використавши формулу $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$, знаходимо:

$$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-7}{2n+1}\right)^{3n+17}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1-8}{2n+1}\right)^{3n+17}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n+1}{-8}}\right)^{\frac{2n+1}{-8}\cdot\left(\frac{-8}{2n+1}\right)\cdot(3n+17)}=$$

$$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2n+1}{-8}}\right)^{\frac{2n+1}{-8}}\right)^{\frac{-8}{2n+1}\cdot(3n+17)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-8}{2n+1}\cdot(3n+17)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-24n-136}{2n+1}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-24-\frac{136}{n}}{2+\frac{1}{n}}}=e^{-\frac{24}{2}}=e^{-12}$$

Приклад 8. Знайти $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-14x+13}{2x^2-17x+15}$

Розв'язання.

За теоремою про границю частки дістанемо

$$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-14x+13}{2x^2-17x+15}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-14x+13)}{\lim\limits_{x\to 2}(2x^2-17x+15)}=\frac{2^2-14\cdot 2+13}{2\cdot 2^2-17\cdot 2+15}=\frac{4-28+13}{8-34+15}=\frac{-11}{-11}=1.$$

Приклад 9. Знайти $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}$.

Розв'язання.

Тут чисельник та знаменник дробу прямують до нуля при $x \to 3$ (невизначеність вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$). Оскільки $\frac{x^2-9}{x^2-3x} = \frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)} = \frac{x+3}{x}$ при $x \neq 3$, то $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x} = \lim\limits_{x\to 3}\frac{x+3}{x} = 2.$ Звідси $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x} = 2.$

Приклад 10. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-14x+13}{2x^2-17x+15}$

Розв'язання.

Тут теорему про границю частки застосувати не можна, тому що $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2-17x+15)=0$.

Крім того, $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-14x+13)=0$, тобто маємо невизначеність виду $\left[\frac{0}{0}\right]$. Розкладемо чисельник і знаменник на множники:

$$x^2-14x+13=(x-1)(x-13), \quad 2x^2-17x+15=2(x-1)\left(x-\frac{15}{2}\right).$$

Оскільки при знаходженні границі функцій в точці x=1 розглядаються значення $x \neq 1$, то даний дріб можна скоротити на (x-*1*), тому

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-14x+13}{2x^2-17x+15} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-13)}{2(x-1)\left(x-\frac{15}{2}\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-13)}{2\left(x-\frac{15}{2}\right)} = \frac{1-13}{2\cdot 1-15} = \frac{-12}{-13} = \frac{12}{13}.$$

Приклад 11. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1} = \left[\frac{0}{0}\right].$

Розв'язання.

Розкладемо на множники чисельник та знаменник дробу:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2(x-1)-(x-1)}{x^2(x+1)-(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)(x+1)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1} = \frac{0}{2} = 0.$$

Приклад 12. Знайти

$$\lim_{x\to 10}\frac{x^3-100}{x^3-20x^2+100x} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Розв'язання.

Маємо:

$$\lim_{x\to 10}\frac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x} = \lim_{x\to 10}\frac{(x-10)(x^2+10x+100)}{x(x-10)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 10}\frac{x^2+10x+100}{x(x-10)}.$$

Чисельник дробу прямує до 300, а знаменник — до нуля, тобто є н.м.в. Таким чином, заданий дріб — н.в.в. (нескінченно велика величина):

$$\lim_{x\to 10}\frac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}=\infty.$$

Приклад 13. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\left[\frac{0}{0}\right].$

Розв'язання.

Домножимо чисельник та знаменник дробу на суму $\sqrt{x+4}+2$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{1}{4}.$$

Приклад 13. Знайти $\lim\limits_{x\to -3}\frac{\sqrt{x+15}-\sqrt{9-x}}{x+3}$

Розв'язання.

При застосуванні теореми про границю частки отримаємо невизначеність виду $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для обчислення границі цієї функції чисельник і знаменник помножимо на вираз спряжений до чисельника. Отримаємо:

$$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{x+15}-\sqrt{9-x}}{x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{(\sqrt{x+15}-\sqrt{9-x})(\sqrt{x+15}+\sqrt{9-x})}{(x+3)(\sqrt{x+15}+\sqrt{9-x})}=$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{x+15-(9-x)}{(x+3)(\sqrt{x+15}+\sqrt{9-x})}=\lim_{x\to -3}\frac{2(x+3)}{(x+3)(\sqrt{x+15}+\sqrt{9-x})}=$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{2}{\sqrt{x+15}+\sqrt{9-x}}=\frac{2}{\sqrt{-3+15}+\sqrt{9+3}}=\frac{2}{2\sqrt{12}}=\frac{1}{\sqrt{12}}.$$

Приклад 15. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right].$

Розв'язання.

Покладемо $1+x=y^5$, тоді

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{x}=\lim_{y\to 1}\frac{y^3-1}{y^5-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y^2+y+1}{y^4+y^3+y^2+y+1}=\frac{3}{5}.$$

Приклад 16. Знайти $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$

Розв'язання.

Поділимо чисельник та знаменник на старший степінь x, тобто на x^3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{4}.$$

Приклад 17. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-14x+13}{2x^2-17x+15}$

Розв'язання.

При застосуванні теореми про границю частки отримаємо невизначеність виду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Для обчислення границі цієї функції чисельник і знаменник поділимо на x^2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-14x+13}{2x^2-17x+15}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{14x}{x^2}+\frac{13}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{17x}{x^2}+\frac{15}{x^x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{14}{x}+\frac{13}{x^2}}{2-\frac{17}{x}+\frac{15}{x^x}}=\frac{1}{2}=0{,}5$$

Приклад 18. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)=[\infty-\infty].$

Розв'язання.

Помножимо та поділимо заданий вираз на $\sqrt{x^2+8x+3}+\ +\sqrt{x^2+4x+3}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)\left(\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}\right)}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+8x+3-x^2-4x-3}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{8}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}=\frac{4}{2}=2.$$

Приклад 19. Знайти $\lim\limits_{x\to 3\pm 0}\left(x+2^{\frac{1}{x-3}}\right)^{-1}.$

Розв'язання.

Якщо $x\to 3-0$, то $\frac{1}{x-3}\to-\infty, 2^{\frac{1}{x-3}}\to 0; \lim\limits_{x\to 3-0}\left(x+2^{\frac{1}{x-3}}\right)^{-1}=\frac{1}{3}.$

Якщо $x\to 3+0$, то $\frac{1}{x-3}\to+\infty, 2^{\frac{1}{x-3}}\to+\infty; \lim\limits_{x\to 3+0}\left(x+2^{\frac{1}{x-3}}\right)^{-1}=0.$

Приклад 20. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$

Приклад 21. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1-\sin x/2}{(\pi-x)^2}=\left[\frac{0}{0}\right].$

Розв'язання.

Для того щоб скористатися першою особливою границею, потрібно виконати таку заміну змінної x, щоб нова змінна прямувала до нуля, наприклад $\pi-x=y$.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1-\sin\frac{x}{2}}{(\pi-x)^2}=\left|\begin{array}{l}\pi-x=y\\ x=\pi-y\\ x\to\pi\\ y\to 0\end{array}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{y}{2}\right)}{y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos\frac{y}{2}}{y^2}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{2\sin^2\frac{y}{4}}{y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{y}{4}\right)}{16\left(\frac{y}{4}\right)^2}=\frac{1}{8}.$$

Приклад 22. $\lim\limits_{x\to 0} ctg\, 4x\cdot tg\, 7x$

Розв'язання.

Для обчислення границі цієї функції використаємо дві з основних формул тригонометрії $ctgx=\frac{\cos x}{\sin x}$ і $tgx=\frac{\sin x}{\cos x}$, а також першу важливу границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$ Маємо

$$\lim_{x\to 0} ctg\, 4x\cdot tg\, 7x=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x}{\sin 4x}\cdot\frac{\sin 7x}{\cos 7x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x}{\cos 7x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 4x}=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 7x}{7x}\cdot 7x}{\frac{\sin 4x}{4x}\cdot 4x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 7x}{7x}}{\frac{\sin 4x}{4x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{7x}{4x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{7}{4}=\frac{1}{1}\cdot\frac{7}{4}=\frac{7}{4}.$$

Приклад 23. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x-1}$

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x-1}=\left[\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)^{2x-1}=\left[1^{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}\cdot\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\left(1+\frac{-2}{x}\right)^{2x}\left(1+\frac{3}{x}\right)}=\frac{e^{3\cdot 2}\cdot 1}{e^{-2\cdot 2}\cdot 1}=e^{10}.$$

Приклад 24. Дослідити на неперервність функцію $y=\sin x$.

Розв'язання.

Область визначення функції $y=\sin x - D=R$.

Візьмемо довільне $x_0\in D=R$, надамо x_0 приросту Δx, тоді приріст функції Δy буде

$$\Delta y= f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Розглянемо

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta x\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\right)=0.$$

Звідси функція $y=\sin x$ неперервна $\forall x_0\in R$, тобто на всій області визначення.

Приклад 25. Показати, що при $x = 4$ функція $y=\frac{x}{x-4}$ має розрив.

Розв'язання.

Знаходимо $\lim\limits_{x\to 4-0}\frac{x}{x-4}=-\infty, \lim\limits_{x\to 4+0}\frac{x}{x-4}=+\infty.$

Таким чином, функція при $x\to 4$ не має ні правої, ні лівої скінченної границі. Звідси, $x = 4$ є точкою розриву 2-го роду.

Приклад 26. Дослідити на неперервність функцію $y=\frac{x^2-25}{x-5}$.

Розв'язання.

У точці $x = 5$ функція має невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$. В інших точках дріб скорочується на $x - 5$, оскільки $x-5\neq 0$. Звідси, при $x\neq 5$ $y=x+5$. Легко показати, що

$$\lim_{x \to 5-0} y = \lim_{x \to 5+0} y = 10.$$

Таким чином, при $x = 5$ функція має усувний розрив. Його можна усунути, якщо домовитися, що при $x = 5$ $y = 10$.

Звідси можна вважати, що функція $y = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$ неперервна при всіх значеннях x, якщо вважати, що рівність $\frac{x^2 - 25}{x - 5} = x + 5$ справджується при всіх значеннях x, включаючи і саму точку $x = 5$. У цьому випадку графіком функції буде пряма лінія $y = x + 5$.

5. Підведення підсумків заняття.

6. Домашнє завдання:

Бубняк Т.І. Вища математика: Навч.посібник. – Львів.,2004. – стор. 74-82, Завдання 5(2,3,5,7,11,14,18,21). Індивідуальні завдання.