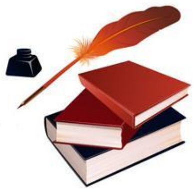

Практичне заняття № 8.

Тема: Екстремум функції. Опуклість графіка функції. Точки перегину.

Мета: закріпити теоретичні знання з теми «Дослідження функції на екстремум», набути навички і вміння знаходити інтервали монотонності, екстремуми функції, проміжки опуклості графіка функції, точки перегину.

1. **Організаційний момент**
2. **Актуалізація опорних знань:** усне опитування

- Яка функція називається зростаючою, спадною?
- Як знайти проміжки зростання (спадання) функції?
- Що називається екстремумом функції?
- Сформулюйте правило дослідження функції на екстремум.
- Яка крива називається опуклою (вгнутою) на інтервалі?
- Дайте означення точок перегину.
- Сформулюйте правило знаходження інтервалів опуклості, вгнутості та точок перегину.
- Як знайти найбільше й найменше значення функції на відрізку?

3. **Мотивація навчання**: повідомлення теми й мети заняття

4. **Розв'язування вправ.**

План практичного заняття

1. **Розв'язування вправ на знаходження інтервалів монотонності і екстремумів функції..**

2. **Застосування похідної до дослідження функції на опуклість (вгнутість) графіка функції.**
3. **Розв’язування задач на найбільше найменше значення функції на відрізку..**

Термінологічний словник ключових понять

Похідна функція – це границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Екстремуми функції – а) При значенні x_1 аргументу x функція $f(x)$ має максимум $f(x_1)$, якщо в деякому околі точки x_1 виконується нерівність $f(x_1)>f(x)\ (x\neq x_1)$. б) При значенні x_2 аргументу x функція $f(x)$ має мінімум $f(x_2)$, якщо в деякому околі точки x_2 виконується нерівність $f(x_2)<f(x)\ (x\neq x_2)$. Максимум або мінімум функції називається екстремумом функції.

Опуклість та вгнутість кривої – крива на проміжку називається опуклою (угнутою), якщо всі точки кривої лежать нижче (вище) від будь-якої її дотичної на цьому проміжку.

Точка перегину – точка, яка відокремлює опуклу частину кривої від вгнутої.

Асимптота кривої – пряма , якщо відстань від змінної точки M кривої до цієї прямої при віддаленні точки M у нескінченність прямує до нуля.

Еластичність функції $E_x(y)$ –границя відношення відносного приросту функції y до відносного приросту змінної x при $\Delta x\to 0$.

Завдання для практичного виконання:

Приклад 1. Знайти проміжки зростання та спадання функції $y=8x-x^2$.

Розв’язання.

Область визначення функції – уся числова вісь $-\infty<x<+\infty$.

Знайдемо похідну $y'=8-2x$. Функція диференційовна на проміжку $-\infty<x<+\infty$.

Для визначення проміжку зростання функції розв’яжемо нерівність $8-2x>0,\quad x<4$, тобто функція зростає на проміжку $-\infty<x<4$.

При визначенні проміжку спадання функції маємо $8 - 2x < 0$, тобто $4 < x < +\infty$.

Приклад 2. Знайти інтервали зростання та спадання функції

$$y = x\left(1 + \sqrt{x}\right).$$

Розв'язання.

Знайдемо похідну $y' = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{x}$. Похідна додатна на проміжку $[0, +\infty)$. Таким чином, функція зростає на всій області означення.

Приклад 3. Дослідити на максимум і мінімум функцію $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$.

Розв'язання.

1. Знаходимо першу похідну $y' = x^2 - 4x + 3$.

2. Знаходимо дійсні корені рівняння $x^2 - 4x + 3 = 0 \left(f'(x) = 0\right)$. Звідки $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

Похідна скрізь неперервна. Значить, інших критичних точок для заданої функції не існує.

3. Досліджуємо критичні значення. Для цього область визначення функції $(-\infty, +\infty)$ здобутими критичними точками розбиваємо на три інтервали $(-\infty, 1)$, $(1, 3)$, $(3, +\infty)$.

Виберемо в кожному інтервалі по одній точці і обчислимо значення похідної в цих точках:

$$x = 0 \in (-\infty, 1),\ \ y'(0) = 3 > 0;$$

$$x = 2 \in (1, 3),\ \ y'(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1 < 0;$$

$$x = 4 \in (3, +\infty),\ \ y'(4) = 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 11 > 0.$$

Знак похідної на кожному з трьох інтервалів збігається зі знаком похідної в обраній точці відповідного інтервалу (табл. 1).

Таблиця.1

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y'	+	0	–	0	+
y	$\nearrow$	$y_{max}(1) = \frac{7}{3}$	$\searrow$	$y_{min}(3) = 1$	$\nearrow$

З таблиці видно: при переході (зліва направо) через значення $x = 1$ похідна змінює знак з «+» на «–». Звідси, при $x = 1$ функція має максимум:

$$y_{\max}(1)=\frac{1^3}{3}-2\cdot 1^2+3\cdot 1+1=\frac{7}{3}.$$

При переході через значення x = 3 похідна змінює знак з «–» на «+». Звідси, при x = 3 функція має мінімум:

$$Y_{\min}(3)=\frac{3^3}{3}-2\cdot 3^2+3\cdot 3+1=1.$$

Приклад 4 . Дослідити на екстремум функцію $y=x\cdot\sqrt{1-x^2}$.

Розв'язання.

Функція визначена при $-1\le x\le 1$.

Знайдемо першу похідну $y'=\dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$;

$y'=0$ при $1-2x^2=0$; звідси $x_1=-1/\sqrt{2}$, $x_2=1/\sqrt{2}$ (стаціонарні точки);

y' не існує $(y'=\infty)$ при $x=\pm 1$, тобто на межах області визначення функції.

Знайдемо другу похідну: $y''=\dfrac{x(2x^2-3)}{(1-x^2)^{3/2}}$.

Обчислимо значення другої похідної в стаціонарних точках:

$$y''(1/\sqrt{2})=\frac{1(1-3)}{\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3/2}}<0,\quad y''(-1/\sqrt{2})=-\frac{1(1-3)}{\sqrt{2\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3/2}}}>0.$$

Отже, у точці $x=1/\sqrt{2}$ функція має максимум

$$y_{\max}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2};$$

у точці $x=1/\sqrt{2}$ — має мінімум:

$$y_{\min}=-\frac{1}{2}.$$

У критичних точках $x=\pm 1$ екстремуму немає, бо за означенням точками екстремуму можуть бути лише внутрішні точки області визначення функції.

Приклад 5. Знайти інтервали опуклості та вгнутості графіка функції $y=e^{-x^2}$.

Розв'язання.

Маємо $y'=-2xe^{-x^2}$, $y''=4\left(x^2-\dfrac{1}{2}\right)e^{-x^2}$.

Друга похідна y'' перетворюється в нуль, коли

$$x^2 - \frac{1}{2} = 0, \text{ звідки } x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

При переході через точки x_1 і x_2 друга похідна змінює знак. Таким чином, точки $M_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ і $M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ є точками перегину графіка функції.

Результати дослідження заносимо в табл. 2.

Таблиця 2

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$
y''	+	0	–	0	+
y	$\cup$	Перегин	$\cap$	Перегин	$\cup$

Із цієї таблиці бачимо, що графік функції на інтервалах $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ і $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$ вгнутий, а на інтервалі $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ – опуклий.

Приклад 6. Визначити на проміжку $\left[-3, \frac{3}{2}\right]$ найбільше й найменше значення функції $y = x^3 - 3x + 3$.

Розв'язання.

1. Знаходимо максимуми й мінімуми функції на проміжку $\left[-3, \frac{3}{2}\right]$:

$y' = 3x^2 - 3, 3x^2 - 3 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -1;$

$y'' = 6x, \quad y''(1) = 6 > 0.$

Таким чином, у точці $x = 1$ маємо мінімум: $y_{\min}(1) = 1$.

Далі, $y''(-1) = -6 < 0$, тобто в точці $x = = -1$ маємо максимум: $y_{\max}(-1) = 5$.

2. Визначаємо значення функції на кінцях проміжку:

$$y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{8}, \quad y(-3) = -15.$$

3. Таким чином, найбільше значення заданої функції на проміжку $\left[-3, \frac{3}{2}\right]$ є: $y_{найб} = y_{\max}(-1) = 5$, а найменше – $y_{найм} = y(-3) = -15$.

Приклад 7. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x) = 3x - x^2$ на сегменті $[-2, 3]$.

Розв'язання.

Знайдемо першу похідну $f'(x)=3-3x^2$ та стаціонарні точки: $3-3x^2=0$, тобто $x=\pm 1$. Визначимо значення функції в стаціонарних точках та на кінцях сегмента: $f(1) = 2$, $f(-1) = -2$; $f(-2) = 2$, $f(3) = -18$.

З одержаних чотирьох значень вибираємо найбільше та найменше: $f_{\max}(1)=2,\ f_{\min}=f(3)=-18$.

Приклад 8. Визначити асимптоти кривої $y=\dfrac{x^2+2x-1}{x}$.

Розв'язання.

1. Оскільки

$$\lim_{x\to\pm 0} y=\lim_{x\to\pm 0}\frac{x^2+2x-1}{x}=\lim_{x\to\pm 0}\left(x+2-\frac{1}{x}\right)=\mp\infty,$$

то пряма $x = 0$ (вісь Ox) є вертикальною асимптотою.

2. Нехай похила асимптота має рівняння $y=kx+b$, тоді

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)=2.$$

Отже, пряма $y=x+2$ — похила асимптота для графіка функції

**Додатково*

Приклад 9. Знайти асимптоти кривої $y=\sqrt{x^3/(x-2)}$.

Розв'язання.

Функція визначена на інтервалах $(-\infty,0)$ та $(2,+\infty)$. Із-за того, що $\lim\limits_{x\to 2+0}\sqrt{x^3/(x-2)}=+\infty$, пряма $x = 2$ є вертикальною асимптотою кривої.

Визначимо тепер існування похилих асимптот:

1) $$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^3/(x-2)}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x/(x-2)}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1/\left(1-\frac{2}{x}\right)}=1,$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-k_1x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-2}\right)}{\sqrt{x-2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x-x+2)}{\sqrt{x-2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)}=1;$$

2) $k_2 = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{\frac{(-x)^3}{2-x}}}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{\frac{x}{x-2}}}{x} =$

$$= -\lim_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{1}{1-\frac{2}{x}}} = -1,$$

$$b_2 = \lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - k_2 x \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} + x \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{\frac{(-x)^3}{2-x}} + x \right) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{-x} + x\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}} = -\lim_{x \to -\infty} \frac{x(-x-2+x)}{\sqrt{2-x}\left(\sqrt{-x} + \sqrt{2-x}\right)} = -1.$$

Таким чином, існують права $y = x + 1$ та ліва $y = -x - 1$ похилі асимптоти кривої.

Самостійне розв'язування вправ.

I варіант

Дослідити задані функції на зростання (спадання) та екстремуми. Знайти проміжки опуклості (вгнутості) графіка функції і точки перегину.

$$y = x^4 + 5x^2 + 4$$

II варіант

$$y = x^3 - 8{,}5x^2 + 20x - 12{,}5$$

5. Підведення підсумків заняття.

6. Домашнє завдання:

Бубняк Т.І. Вища математика: Навч.посібник. – Львів.,2004. – стор. 98-102, 113 Завдання 2(2,3), 3(3,4), 4(2).