Практичне заняття № 9.

Тема: Розв'язання задач економіки за допомогою екстремумів.

Мета: закріпити теоретичні знання з теми «Дослідження функції на екстремум», набути навички і вміння розв'язувати економічні задачі за допомогою екстремумів і диференціального числення.

1. **Організаційний момент**
2. **Актуалізація опорних знань:** усне опитування

- Яка функція називається зростаючою, спадною?
- Як знайти проміжки зростання (спадання) функції?
- Що називається екстремумом функції?
- Сформулюйте правило дослідження функції на екстремум.
- Яка крива називається опуклою (вгнутою) на інтервалі?
- Дайте означення точок перегину.
- Сформулюйте правило знаходження інтервалів опуклості, вгнутості та точок перегину.
- Як знайти найбільше й найменше значення функції на відрізку?
- Які ви знаєте функції, що використовуються в економіці?

3. **Мотивація навчання**: повідомлення теми й мети заняття

4. **Розв'язування вправ.**

План практичного заняття

1. **Розв'язування прикладних задач на застосування похідної та відносної похідної (еластичності).**

2. Дослідження динаміки функцій в економічних процесах.

Термінологічний словник ключових понять

Похідна функція – це границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Екстремуми функції – а) При значенні x_1 аргументу x функція $f(x)$ має максимум $f(x_1)$, якщо в деякому околі точки x_1 виконується нерівність $f(x_1)>f(x)\ (x\neq x_1)$. б) При значенні x_2 аргументу x функція $f(x)$ має мінімум $f(x_2)$, якщо в деякому околі точки x_2 виконується нерівність $f(x_2)<f(x)\ (x\neq x_2)$. Максимум або мінімум функції називається екстремумом функції.

Опуклість та вгнутість кривої – крива на проміжку називається опуклою (угнутою), якщо всі точки кривої лежать нижче (вище) від будь-якої її дотичної на цьому проміжку.

Точка перегину – точка, яка відокремлює опуклу частину кривої від вгнутої.

Асимптота кривої – пряма , якщо відстань від змінної точки M кривої до цієї прямої при віддаленні точки M у нескінченність прямує до нуля.

Граничні витрати виробництва виражаються похідною $K'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta K}{\Delta x}$, яка наближено характеризує додаткові затрати на виробництво одиниці додаткової продукції. Граничні витрати залежать від рівня виробництва (кількості продукції, що випускається) x і визначаються не постійними виробничими затратами, а тільки змінними (на сировину, паливо і т.п.).

Еластичність функції $E_x(y)$ –границя відношення відносного приросту функції y до відносного приросту змінної x при $\Delta x\to 0$.

Завдання для практичного виконання:

1. Розв'язування прикладних задач на застосування похідної та відносної похідної (еластичності).

При розв'язування практичних економічних задач особлива увага приділяється вмінню інтерпретувати знайдені результати.

У задачах фінансового змісту функція, яка моделює деяку фінансову залежність (сумарні витрати, загальна вартість виробленого продукту, попит на товар, сумарний виторг тощо), задана. Потрібно дослідити її на максимум (мінімум) й інтерпретувати результати.

Приклад 1. Загальна вартість вироблених q одиниць деякого продукту визначається функцією $C=100000+1500q+0{,}2q^2$ (грн.). Скільки одиниць продукції потрібно виробити, щоб мінімізувати середню вартість одиниці продукції?

Розв'язання.

Середня вартість одиниці продукції визначається діленням загальної вартості на кількість вироблених одиниць. Наприклад, якщо загальна вартість десяти одиниць продукції дорівнює 275 грн., то середня вартість одиниці продукції становить 275:10=27,5 (грн.).

Записавши функцію (математичну модель), яка визначає середню вартість одиниці продукції:

$$f(q)=\frac{C}{q}=\frac{100000}{q}+15000+0{,}2q,$$ досліджуємо її.

Дослідження моделі, $f'(q)=-100000q^{-2}+0{,}2$.

Якщо $f'(q)=0$, то $100000q^{-2}=0{,}2$ або $q^2=\dfrac{100000}{0б2}=500000$.

Звідси $q=707{,}11$ (од.).

Перевіряємо критичну точку за допомогою другої похідної:

$f''(q)=200000q^{-3}$; $f''(707{,}11)=200000\cdot 707{,}11^{-3}=0{,}00056>0$

Таким чином, мінімум досягається при $q=707{,}11$.

Інтерпретація. Виходячи з економічного змісту задачі, одержаний результат можна заокруглити до цілих одиниць, $q=707$ од. Мінімальна середня вартість одиниці продукції дорівнює:

$f(707)=100000:707+1500+0{,}2\cdot 707=1782$ (грн.).

Економічні задачі на дослідження функціональних залежностей між величинами мають специфічні особливості. При розв'язуванні таких задач використовується поняття еластичності функції (відносної похідної функції).

Означення. **Еластичністю** функції $y=f(x)$ називається границя відношення відносного приросту функції до відносного приросту аргументу x при $\Delta x\to 0$.

Позначення:

$$\boxed{E_x(f(x))}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\Delta f(x)}{f(x)}}{\dfrac{\Delta x}{x}}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\cdot\frac{x}{f(x)}\right)=\frac{x}{f(x)}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\boxed{\frac{x}{f(x)}\cdot f'(x).}$$

Інтерпретація еластичності.

Еластичність функції показує наближено, на скільки відсотків зміниться функція y = f(x) при зміні незалежної змінної x на 1%:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \approx E_x(f(x))\frac{\Delta x}{x}.$$

1) Якщо $|E_x(f(x))| < 1$, то функція називається *нееластичною* (відносний її приріст спадає).

2) Якщо $|E_x(f(x))| > 1$, то функція називається *еластичною* (відносний приріст її зростає).

Геометрична ілюстрація

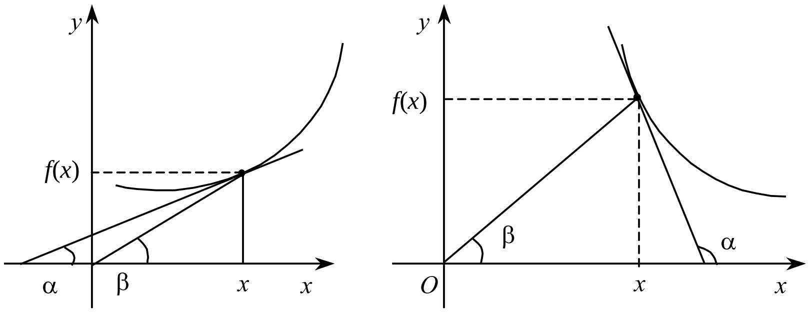

Рис. 1 *Рис. 2*

$$\boxed{E_x(f(x)) = x\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f'(x)}{\frac{f(x)}{x}} = \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}\beta}.}$$

$\boxed{\text{Функція нееластична}} \Rightarrow \left|E_x\left(f(x)\right)\right| < 1 \Rightarrow |\mathrm{tg}\alpha| < |\mathrm{tg}\beta| \Rightarrow |\alpha| < |\beta|$ (рис. 1).

$\boxed{\text{Функція еластична}} \Rightarrow |E_x(f(x))| > 1 \Rightarrow |\mathrm{tg}\alpha| > |\mathrm{tg}\beta| \Rightarrow \boxed{|\alpha| > |\beta|}$ (рис. 2).

В економіці розглядають кілька видів еластичності.

1. Еластичність попиту щодо ціни:

$$E_p(q) = \frac{dq}{q}\Big/\frac{dp}{p} = \frac{dq}{dp}\cdot\frac{p}{q},$$

Еластичність попиту щодо ціни наближено визначає, як зміниться попит на даний товар, якщо його ціна зросте на 1% і характеризує чутливість споживачів до зміни цін на продукцію.

У більшості випадків функція попиту є спадною, оскільки з підвищенням ціни на товар попит на нього знижується. У таких випадках

$$\frac{dq}{dp} < 0$$

Щоб виключити від'ємні числа при визначенні еластичності попиту, приймається, що

$$E_p(q) = -\frac{p}{q}\cdot\frac{dq}{dp} = -\frac{p}{q}q'$$

Якщо цінова еластичність попиту за абсолютною величиною більша за одиницю, то попит називають *еластичним* (цілком еластичним у разі нескінченно великої еластичності попиту).

Якщо цінова еластичність попиту за абсолютною величиною менша від одиниці, то попит називають *нееластичним* (цілком нееластичним у разі нульової еластичності попиту). Схему, що ілюструє зазначену закономірність, зображено на рис. 3.

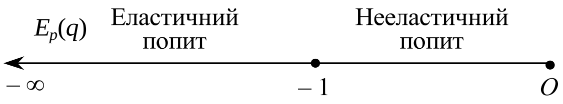

Рис. 3

І, нарешті, якщо цінова еластичність попиту за абсолютною величиною дорівнює одиниці, то говорять про *попит з одиничною еластичністю*.

Приклад 2. Якщо функція попиту q=10-p, то еластичність попиту за формулою $E_p(q) = -\frac{p}{q}\cdot\frac{dq}{dp} = -\frac{p}{q}q'$ дорівнює:

$$E_p(q) = -\frac{p}{q}\cdot\frac{dq}{dp} = -\frac{p}{10-p}(-1) = \frac{p}{10-p}$$

Тоді, при p = 2, $E_2(q) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

Це означає, що при ціні p = 2 підвищення її на 1% знизить попит на $\frac{1}{4}$%.

2. Еластичність попиту за доходом:

$$E_i(q) = \frac{dq}{q} / \frac{dI}{I} = \frac{dq}{dI}\frac{I}{q},$$

що виражає відносну зміну (у відсотках) розміру попиту на будь-яке благо в разі зміни доходу споживачів цього блага на 1%. Додатна еластичність попиту за доходом характеризує нормальні (якісні) товари, а від'ємна – малоцінні (низькоякісні) товари.

Наприклад, високий додатний коефіцієнт попиту за доходом у галузі означає, що її внесок у економічне зростання більший, ніж частка у структурі економіки, і вона має шанси на розширення й розвиток у майбутньому. Навпаки, якщо коефіцієнт еластичності попиту на продукцію галузі за доходом має невелике додатне чи від'ємне значення, то на неї очікує застій і перспектива скорочення виробництва.

3. Перехресна еластичність попиту за ціною:

$$Ep_j(q_j) = \frac{dq_i}{q_i} / \frac{dp_j}{p_j} = \frac{dq_i}{dp_j}\frac{p_i}{q_j},$$

що характеризує відносну зміну (у відсотках) розміру попиту на одне благо в разі зміни ціни на інше благо (яке заміщує або доповнює його у споживанні) на 1%. Додатна перехресна еластичність попиту за ціною свідчить про заміщуваність благ, а від'ємна – про доповнюваність.

Розглянемо задачі на визначення еластичності деяких показників.

Приклад 3. Залежність між собівартістю одиниці продукції y (тис.грн.) і випуском продукції x (млрд. грн.) виражається функцією $y=-0{,}5x+80$. Знайти еластичність собівартості при випуску продукції 60 млрд грн.

Розв'язання.

За формулою $E_x(y)=\dfrac{x}{f(x)}\cdot f'(x)$ знаходимо:

$$E_x(y)=\frac{-0{,}5x}{-0{,}5x+80}=\frac{x}{x-160}$$

При $x=60$ $E_{x=60}(y)=-0{,}6$, тобто при випуску продукції 60 млрд грн. збільшення його на 1% призведе до зниження собівартості на 0,6%.

Приклад 4. Обсяг продукції u (ум.од.) цеху упродовж робочого дня визначається функцією: $u=-t^3-5t^2+80t+320$, де t – час (год.).

Знайти продуктивність праці через дві години від початку роботи.

Приклад 5. Залежність між витратами виробництва y (ум.од.) та обсягом випущеної продукції x (од.) виражається функцією $y=10x-0{,}04x^3$. Визначити середні і граничні витрати при обсязі продукції, щодорівнює 5 одиниць.

Приклад 6. Функція попиту Q_D і пропозиції Q_S від ціни p виражаються, відповідно, рівняннями: $Q_D=7-p,\ Q_S=p+1$.

Знайти: 1) рівноважну ціну; 2) еластичність попиту і пропозиції для цієї ціни; 3) зміну доходу (у процентах) при збільшенні ціни на 5% від рівноважної.

2. Дослідження динаміки функцій в економічних процесах.

В економіці розглядають такі функціональні залежності:

—між попитом Q_D на даний товар і його ціною p: $Q_D=f(p)$;

—між попитом Q_D на даний товар і доходом r від його реалізації (при умові, що фактори, від яких залежить попит на товар, не змінюються): $Q_D=f(r)$;

—між пропозицією Q_S на деякий товар і його ціною p: $Q_S=f(p)$;

—між витратами виробництва K та обсягом продукції Q: $K=f(Q)$; ,

—між виторгом V від продажу товару і попитом q: $V=f(q)$;

— між фінансовими нагромадженнями підприємства A та обсягом випуску продукції Q: $A= f(Q)$.

Особливістю пропонованої системи задач є те, що в них, як правило, задана функціональна залежність між величинами в економічних, фінансових ситуаціях. Вимагається дослідити цю залежність при виконанні певних вимог.

Розглянемо задачі двох видів:

1) на дослідження зміни функціональної залежності (зростає або спадає) при виконанні певних вимог;

2) на дослідження динаміки зміни цієї залежності (зростає або спадає повільніше чи швидше).

Приклад 7. Підприємство виробляє за місяць x одиниць продукції. Залежність фінансових нагромаджень підприємства від обсягу випуску продукції виражається формулою $A(x)=-0{,}01x^3+300x-500$. При яких значеннях x одиниць продукції фінансові нагромадження підприємства зменшуються?

Розв'язання.

$A'(x)=-0{,}03x^2+300$. Якщо $A'(x)<0$, то $-0{,}03x^2+300<0$, $3x^2-30000>0$, або $x^2-10000>0$. Нерівність справедлива при $x<-100$ і $x>100$.

Інтерпретація. Якщо випуск продукції перевищує 100 одиниць, фінансові нагромадження підприємства зменшуються.

Приклад 8. На підприємстві змінні витрати місячного обсягу (x тонн) випуску продукції визначаються функцією: $K=\frac{1}{10}x^3-\frac{9}{2}x^2+80x+300$. Як змінюються витрати залежно від випуску продукції щомісяця?

Розв'язання

$K'=\frac{3}{10}x^2-9x+80$. Дискримінант $D=81-96=-15<0$. Отже. $K'>0$ для будь-якого x. Обчисливши $K''=3/5x-9$, отримаємо: $K''>0$. якщо $x>15$; $K''<0$, якщо $x<15$.

Інтерпретація. Якщо випуск продукції не перевищує 15 т на місяць, то змінні витрати зростають повільніше; якщо місячний випуск перевищує 15 т. то змінні витрати зростають, швидше.

5. Підведення підсумків заняття.

6. Домашнє завдання:

Бубняк Т.І. Вища математика: Навч.посібник. – Львів.,2004. – стор. 98-102, 113 Завдання 2(4), 3(5), 4(3,5).