Самостійна робота №1.

Тема: Обчислення визначників. Дії над матрицями. (2год.)

Методичні рекомендації:

Опрацювати рекомендовану літературу за планом:

1. Визначники другого та третього порядків, методи їх обчислення.
2. Обчислення визначників методом розкладу визначника за елементами якого-небудь рядка або стовпця.
3. Дії над матрицями.

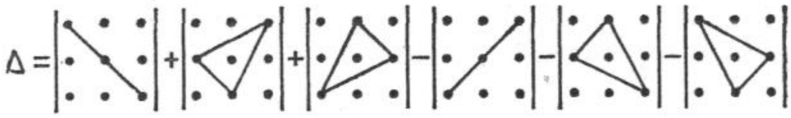
1. Визначники другого та третього порядків, методи їх обчислення.

Визначник другого порядку – це вираз $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$;

Визначник третього порядку **–** це вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Правило трикутників –



2. Обчислення визначників методом розкладу визначника за елементами якого-небудь рядка або стовпця.

Мінор M_{ij} елемента a_{ij} визначника – це визначник, який утворюється з даного визначника в результаті викреслювання *i*-го рядка та *j*-го стовпця.

Алгебраїчне доповнення A_{ij} елемента a_{ij} – це його мінор, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто $A_{ij}=(-1)^{i+j} M_{ij}$

Розклад визначника за елементами відповідного рядка або стовпця: Визначник дорівнює сумі добутків елементів якого-небудь рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення.

3. Дії над матрицями.

Матриця розмірності m x n – *це* таблиця чисел, що містить m рядків і n стовпців виду

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Квадратна матриця **–** це матриця у якої $m = n$.

Діагональна матриця – це квадратна матриця, в якої всі елементи, що не належать головній діагоналі, дорівнюють нулю.

Одинична матриця – це діагональна матриця, в якої всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці.

Транспонована матриця – це матриця рядки і стовпці якої поміняні місцями.

Ранг матриці А – це найбільший порядок відмінного від нуля її мінора. Ранг матриці А прийнято позначати *Rg(A)* або *rang A.*

Матриця не особлива, якщо визначник цієї матриці відмінний від нуля.

Обернена матриця до матриці А – це матриця A^{-1}., *якщо* $A\cdot A^{-1}=E$

Обернена матриця знаходиться за формулою:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

де $\det A$- визначник матриці A, A_{ij} - алгебраїчні доповнення всіх елементів a_{ij} матриці А.

Введемо операції над матрицями.

1. *Сумою* двох матриць $A=(a_{ij})$ і $B=(b_{ij})$ однакової розмірності називають матрицю С тієї ж розмірності, до того ж $c_{ij}= (a_{ij}+ b_{ij})$,. тобто відповідні елементи додаються.

2. *Добутком* матриці $A=(a_{ij})$ на число А називають матрицю *С* тієї ж розмірності, що і матриця *А,* до того ж $c_{ij} = (Aa_{ij})$, тобто всі елементи множаться на число А

3. *Добутком* матриці $A =(a_{ij})$ розмірності *m x n* на матрицю $B=(b_{ij})$ розмірності n x k називають матрицю $C =(C_{pg})$ розмірності *m x k,* до того ж $C_{pg}=a_{p1}\, b_{1g}+ a_{p2}\, b_{2g}+\ldots+a_{pn}\, b_{ng}$.

Зауваження. Для множення матриць має суттєве значення порядок їх слідування. Матрицю *A* можна множити на матрицю *B* лише тоді, коли кількість стовпців матриці *A* дорівнює кількості рядків матриці *B.* Утворення елемента c_{pg} можна отримати як множення *p-того* рядка матриці *A* на g-тий стовпчик матриці *B*.

Властивості.

1. Відносно суми:

- $A+B = B+A$ (комутативність);
- $(A+B) + C = A+(B+C)$ (асоціативність).

2. Відносно добутку на число:

- $\lambda A=A\lambda$ (комутативність) ;
- $(\lambda+ \mu)\ A = \lambda A+\mu A$ (дистрибутивність відносно суми чисел);
- $\lambda\ (A+ B)=\lambda A+\lambda B$ (дистрибутивність відносно суми матриць).

3. Відносно множення матриць :

1) $AB\neq BA$ (не комутативність) ;
2) $(A\cdot B)\cdot C = A\ (B\cdot C)$ (асоціативність);
$(A\cdot B)^{T} = B^{T}\cdot A^{T}$, де "т" - операція транспонування

Рекомендована література:

1. Бубняк Т.І. Вища математика: Навчальний посібник. – Львів:“Новий світ–2000”,2004, с.5-8.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.:А.С.К., 2001.- Розділ 1 § 1, 2, с.6-16.
3. Пастушенко С.М., Підченко Ю.П. Вища математика. Довідник для студентів вищих навч.закладів: Навч. посібник. 2-е вид., виправлене і доповн. -К.: Діал.,2003, с.9-24.

Завдання для виконання:

Розв'язати приклади:

1) Обчислити визначники: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 8 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

2) Розклавши визначник за рядком або стовпцем, що складається лише з букв, обчислити:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

3) Знайти A+B, B-A, 3A+2B, AB, BA, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

4) *Знайти матрицю, обернену даній матриці. Перевірити результат, обчисливши добуток даної і отриманої матриць.* Розв'язати приклади згідно свого варіанту *(№ варіанту – остання цифра номера по журналу)*.

1. $\begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 9 & 9 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 14 & 13 & 7 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 7 & 6 & 2 \\ 7 & 9 & 2 \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} 9 & 7 & 3 \\ 14 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 11 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ 7. $\begin{pmatrix} 12 & 6 & 1 \\ 19 & 16 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 9. $\begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 10 & 16 & 7 \end{pmatrix}$ 10. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 9 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

Прилади розв'язування вправ

Приклад 1. Обчислити визначники:

1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ 3) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$=3·1-4·(-2)=3+8=11 – *правило прямокутника.*

2) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$=2·8·5+3·3·(-2)+5·0·1-(-2)·1·8-3·3·5-2·3·0=80-18+16-45=33

– *правило трикутника.*

3) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

Розв'язання.

1) У першому рядку визначника перетворимо всі елементи на нуль, крім першого за допомогою елементарних перетворень: перший і другий рядок залишимо без змін, до третього додамо перший, а до четвертого – перший помножений на (-2). Тоді:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Розклавши цей визначник за елементами першого рядка, дістанемо:

$$\Delta = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -21$$

Приклад 2. Знайти матрицю обернену до даної.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Обернена матриця знаходиться за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

де det*A*- визначник матриці *A*, A_{ij} - алгебраїчні доповнення всіх елементів a_{ij} матриці А.

Обчислимо визначник матриці А:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 24 - 8 + 12 + 6 + 24 = 1$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення A_{ij} всіх елементів a_{ij} матриці А за формулою $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, де M_{ij} – мінор елемента a_{ij} матриці А, тобто визначник на одиницю меншого порядку, утворений з визначника матриці викреслюванням і-го рядка та j-го стовпця.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 6 = -3 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 8 & -6 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -(-24 + 24) = 0$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 8 - 12 = -4 \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -(-3 + 1) = 2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 4) = 3$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -6 + 3 = -3 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} = -(-6 + 8) = -2$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 8 = -5$$

Підставивши в формулу отримані алгебраїчні доповнення і значення визначника матриці А, отримаємо обернену матрицю

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -4 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -4 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$

Питання для самоконтролю:

- Що називається визначником другого порядку?
- Що називається визначником третього порядку7
- Сформулюйте основні властивості визначників.
- Дайте означення мінору і алгебраїчного доповнення?

- Дайте означення визначника четвертого порядку.
- Які методи обчислення визначників ви знаєте?
- Як обчислюються визначники вищих порядків?
- Сформулюйте теорему про розклад визначника за елементами якого-небудь рядка або стовпчика
- Що називається матрицею розміром *m x n*?
- Які види матриць ви знаєте?
- Дайте означення квадратної матриці.
- Дайте означення одиничної матриці.
- Що називається визначником матриці?
- Яка матриця називається оберненою до даної?
- Як знайти обернену матрицю?
- Що таке ранг матриці? Як знаходиться ранг?