Самостійна робота №10.

Тема: Найбільше й найменше значення функції. (2год.)

Методичні рекомендації:

Опрацювати рекомендовану літературу за планом:

1. Найбільше й найменше значення функції.
2. Розв’язування задач прикладного змісту на знаходження найбільшого і найменшого значення функції.

1. Найбільше й найменше значення функції на відрізку.

Функція на відрізку $[a;b]$ досягає свого найбільшого і найменшого значення або на одному з кінців цього відрізка, або у внутрішній точці, яка є точкою екстремуму функції.

Щоб знайти найбільше (найменше) значення неперервної функції на відрізку $[a;b]$, потрібно:

1) знайти всі точки екстремуму функції на заданому відрізку;
2) знайти значення функції у знайдених екстремальних точках;
3) визначити значення функції на кінцях відрізка $[a;b]$, тобто $f(a)$ і $f(b)$;
4) із усіх отриманих значень вибрати найбільше і найменше значення функції.

Рекомендована література:

1. Богомолов М.В. Практичні заняття з математики: Навч. посібник для технікумів, – К.: Вища школа. Головне вид-во, 1979, с.87-98.
2. Бубняк Т.І. Вища математика: Навчальний посібник. – Львів: “Новий світ–2000”,2004, с.101-102.

3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.:А.С.К., 2001, с.246-265.

Завдання для виконання:

Розв'яжіть приклади:

Завдання 1. Знайти найменше та найбільше значення функції $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$ *(№ варіанту – порядковий номер по журналу)*:

1. $y = \ln(x^2 - 2x + 2), \quad [0; 3].$
2. $y = 3x/(x^2 + 1), \quad [0; 5].$
3. $y = (2x - 1)/(x - 1)^2, \quad [-1/2; 0].$
4. $y = (x + 2)e^{1-x}, \quad [-2; 2].$
5. $y = \ln(x^2 - 2x + 4), \quad [-1; 3/2].$
6. $y = x^3/(x^2 - x + 1), \quad [-1; 1].$
7. $y = ((x + 1)/x)^3, \quad [1; 2].$
8. $y = \sqrt{x - x^3}, \quad [0; 1].$
9. $y = 4 - e^{-x}, \quad [0; 1].$
10. $y = (x^3 + 4)/x^2, \quad [1; 2].$
11. $y = xe^x, \quad [-2; 0].$
12. $y = (x - 2)e^x, \quad [-2; 1].$
13. $y = (x - 1)e^{-x}, \quad [0; 3].$
14. $y = x/(9 - x^2), \quad [-2; 2].$
15. $y = (1 + \ln x)/x, \quad [1/e; e].$
16. $y = e^{4x - x^2}, \quad [1; 3].$
17. $y = (x^5 - 8)/x^4, \quad [-3; -1].$
18. $y = \dfrac{e^{2x} + 1}{e^x}, \quad [-1; 2].$
19. $y = x\ln x, \quad [1/e^2; 1].$
20. $y = x^3 e^{x+1}, \quad [-4; 0].$
21. $y = (x^2 - 2x + 2)/(x + 1), \quad [1; 3].$
22. $y = (x + 1)\sqrt[3]{x^2}, \quad [-4/5; 3].$
23. $y = e^{6x - x^2}, \quad [-3; 3].$
24. $y = (\ln x)/x, \quad [1; 4].$
25. $y = 3x^4 - 16x^3 + 2, \quad [-3; 1].$
26. $y = x^5 - 5x^4 + 5x + 1, \quad [-1; 2].$
27. $y = (3 - x)e^{-x}, \quad [0; 5].$
28. $y = \sqrt{3}/2 + \cos x, \quad [0; \pi/2].$

29. $y = 108x - x^4, \quad [-1; 4].$ 30. $y = x^2/4 - 6x^3 + 7, \quad [16; 20].$

Завдання 2. *Розв'язати задачу на найбільше й найменше значення функції (№ варіанту – остання цифра порядкового номера по журналу)*:

1. Прямокутний загін, який однією стороною прилягає до річки треба огородити дротяною сіткою завдовжки 370 м. Якими мають бути сторони прямокутника, щоб його площа була найбільша?
2. Є матеріал на виготовлення 85 м огорожі. Яку найбільшу ділянку можна огородити за допомогою цього матеріалу, якщо вона прилягає з одного боку до заводської стіни?
3. Є 130 м проволоки, якою потрібно огородити ділянку прямокутної форми і найбільшої площі. Які розміри повинна мати ця ділянка?
4. Якими повинні бути сторони прямокутної ділянки, периметр якої 310м, щоб площа цієї ділянки була найбільшою?
5. У магазині фермер купив матеріал для огорожі завдовжки 320 м. Як відгородити прямокутну ділянку найбільшої площі?
6. Яку найбільшу ділянку прямокутної форми можна огородити дротяною сіткою завдовжки 470 м?
7. Є 170 м проволоки, якою потрібно огородити ділянку прямокутної форми і найбільшої площі. Які розміри повинна мати ця ділянка?
8. Прямокутний загін, який однією стороною прилягає до річки треба огородити дротяною сіткою завдовжки 260 м. Якими мають бути сторони прямокутника, щоб його площа була найбільша?
9. Прямокутна земельна ділянка площею 4044 $м^2$ огороджується забором. Якими повинні бути розміри ділянки, щоб периметр був найменшим?
10. Є матеріал на виготовлення 60 м огорожі. Яку найбільшу ділянку можна огородити за допомогою цього матеріалу, якщо вона прилягає з одного боку до заводської стіни?

2. Приклади розв'язування вправ:

Приклад 1.Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x) = 5x + \dfrac{1}{5x}$ на проміжку [0,01;100].

Розв'язання.

У даному випадку похідна $f'(x)=\dfrac{25x^2-1}{5x}$ в інтервалі [0,01; 100] має тільки один корінь – x=0,2. Обчислимо значення функції в стаціонарній точці x = 0,2 і на кінцях проміжку [0,01; 100]:

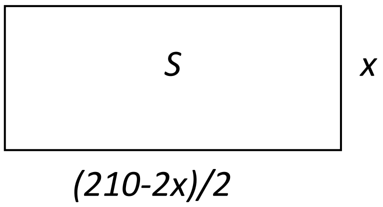
$$f(0{,}2)=2,\ f(0{,}01)=f(100)=100{,}01.$$

Звідси

$$\max_{x\in[0{,}01;100]} f(x)=100{,}01, \qquad \min_{x\in[0{,}01;100]} f(x)=2$$

Приклад 2. Якими повинні бути сторони прямокутної ділянки, периметр якої 210м, щоб площа цієї ділянки була найбільшою?

Розв'язання.



Ділянка має площу прямокутника. Позначимо одну сторону прямокутника через x (м), тоді друга сторона буде дорівнювати

$$P=2(a+b),\ \ a=x,$$
$$P=2(x+b)=210,$$
$$2b=210-2x$$
$$b=\frac{210-2x}{2}=105-x(м)$$

Які відомо, площа прямокутника обчислюється за формулою

$$S=a\cdot b$$

Підставляючи замість a і b отримані значення отримаємо функцію

$$S(x)=x\cdot(105-x)=105x-x^2.$$

Знайдемо похідну від цієї функції

$$S'(x)=\left(105x-x^2\right)'=105-2x.$$

Прирівняємо похідну до нуля і знайдемо критичні точки функції

$$S'(x)=0\ \Rightarrow 105-2x=0$$
$$2x=105\ \Rightarrow\ x=52{,}5(м)$$

Обчислимо значення функції в знайденій точці і на кінцях відрізка $x \in [0;\, 210]$.

$$S(0) = 105 \cdot 0 - 0^2 = 0$$

$$S(210) = 105 \cdot 210 - 210^2 = -\frac{210^2}{2} < 0$$

$$S(52{,}5) = 105 \cdot 52{,}5 - 52{,}5^2 = 2756{,}3\left(м^2\right)$$

Знайдемо другу сторону $b = 105 - 52{,}5 = 52{,}5(м)$

Відповідь. Найбільшу площу буде мати ділянка у формі квадрата зі стороною 52,5 м. площа ділянки при цьому дорівнює 2756,3 м^2.

Приклад 3. Визначити, при яких розмірах відкритого басейну з квадратним дном, на облицювання стін і дна буде затрачено найменшу кількість матеріалу. Об'єм басейну V фіксований.

Розв'язання:

Басейн має форму прямокутного паралелепіпеду. Його об'єм визначається за формулою $V = S_{осн} \cdot H$. Позначимо сторону основи квадратного дна басейну за x. Звідси площа основи: $S_{осн} = x^2$.

Висоту басейну визначимо як $H = \frac{V}{S_{осн}} = \frac{V}{x^2}$. Маємо бічну площу поверхні $S_{біч} = 4Hx = \frac{4Vx}{x^2} = \frac{4V}{x}$. Отже, загальна площа, яку необхідно облицювати, дорівнює

$$S = x^2 + \frac{4V}{x}.$$

Дослідимо цю функцію на екстремум:

$$S' = 2x - \frac{4V}{x^2} = \frac{2x^3 - 4V}{x^2}$$

$$S' = 0,\ \frac{2x^3 - 4V}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2V}.$$

Після з'ясування знаків S' в кожному з частинних інтервалів, встановили, що в точці $x = \sqrt[3]{2V}$ функція набуває мінімуму.

Отже, при стороні дна $x = \sqrt[3]{2V}$ і висоті $H = \frac{V}{\sqrt[3]{4V^2}} = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}$ басейн фіксованого об'єму потребує найменшу кількість облицювального матеріалу.

Питання для самоконтролю:

- Як знайти проміжки зростання (спадання) функції?
- Що таке критичні точки функції?
- Що називається екстремумом функції?
- Сформулюйте правило дослідження функції на екстремум.
- Сформулюйте правило знаходження інтервалів опуклості, вгнутості та точок перегину.
- Як знайти найбільше й найменше значення функції на відрізку?