Самостійна робота №11.

Тема: Дослідження функцій і побудова графіків. (2год.)

Методичні рекомендації:

Опрацювати рекомендовану літературу за планом:

1. Загальна схема дослідження функції за допомогою похідної.
2. Розв'язування прикладів на дослідження функцій. Побудова графіків.

1. Загальна схема дослідження функції за допомогою похідної.

1. Знайти область визначення функції.
2. З'ясувати , чи є функція парною, непарною, періодичною.
3. Знайти нулі функції, т/б точки перетину графіка функції з осями координат, (якщо це не важко).
4. Дослідити функцію на неперервність, знайти точки розриву функції, якщо вони існують, і знайти односторонні границі в точках розриву.
5. Знайти проміжки монотонності функції.
6. Знайти екстремуми функції.
7. Знайти проміжки опуклості графіка функції і точки перегину.
8. Знайти асимптоти графіка функції, якщо вони існують.
9. Побудувати графік, використовуючи знайдені результати дослідження.

Рекомендована література:

1. Богомолов М.В. Практичні заняття з математики: Навч. посібник для технікумів, – К.: Вища школа. Головне вид-во, 1979, с.98-101,66.

2. Бубняк Т.І. Вища математика: Навчальний посібник. – Львів: “Новий світ–2000”,2004, с.102-105.

3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.:А.С.К., 2001, с.265-268.

Завдання для виконання:

Розв’яжіть завдання згідно свого варіанту (№ варіанту – остання цифра порядкового номера по журналу):

Дослідити функцію засобами диференціального числення і побудувати її графік.

1. а) $y=\frac{1}{20}\left(x^3-25x^2+143x-119\right)$, б) $y=\frac{1}{x^2-1}$
2. а) $y=\frac{1}{3}\left(x^3-14x^2+49x-36\right)$, б) $y=\frac{1}{x^2+1}$
3. а) $y=\frac{1}{3}\left(x^3-16x^2+69x-54\right)$, б) $y=\frac{x^2-4}{x}$
4. а) $y=\left(x^3-8{,}5x^2+20x-12{,}5\right)$, б) $y=\frac{x}{x^2-4}$
5. а) $y=\left(x^3-9{,}5x^2+26x-17{,}5\right)$, б) $y=x-\sqrt{x}$
6. а) $y=\frac{1}{20}\left(x^3-29x^2+215x-187\right)$, б) $y=\frac{1}{x^2-7x+12}$
7. а) $y=\frac{1}{20}\left(x^3-19x^2+55x+75\right)$, б) $y=\ln\left(x^2+1\right)$
8. а) $y=\frac{1}{3}\left(x^3-8x^2+5x+14\right)$, б) $y=x\sqrt{x-3}$

9. а) $y = \frac{1}{3}\left(x^3 - 18x^2 + 33x + 28\right)$, б) $y = \frac{6 - x^3}{x^2}$

10.а) $y = \left(x^3 - 2{,}5x^2 + 2x + 1{,}5\right)$, б) $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

2. Приклади розв'язування вправ:

Приклад. Дослідити засобами диференціального числення функцію $y = f(x)$ і побудувати її графік.

$$y = -4 \cdot \frac{(x+2)^2}{x^2 + 4}$$

Розв'язання.

1. Дана функція є дробово-раціональною. Вона визначена на всій множині дійсних чисел, оскільки знаменник в нуль не обертається, тобто $D(y) = (-\infty; \infty)$.

2. Дослідимо функцію на парність та непарність. Підставивши замість значень *x* значення (-*x*), отримаємо:

$$y(-x) = -4 \cdot \frac{((-x)+2)^2}{(-x)^2 + 4} = -4 \cdot \frac{(-x+2)^2}{x^2 + 4} \neq y(x) \neq -y(x)$$

Отже, функція ні парна, ні непарна. Дана функція не є періодичною.

3. Знайдемо точки перетину графіка функції з осями координат.

$$y = -4 \cdot \frac{(x+2)^2}{x^2 + 4}.$$

Знайдемо точки перетину графіка функції з віссю абсцис.

y=0, тобто $-4 \cdot \frac{(x+2)^2}{x^2+4} = 0 \Rightarrow (x+2)^2 = 0 \Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$.

Отже графік функції перетинає вісь *Ox* в точці A(-2;0).

Знайдемо точки перетину графіка функції з віссю ординат.

x=0, тоді $y=-4\cdot\frac{(0+2)^2}{0^2+4}=-4\cdot\frac{4}{4}=-4$.

Отже, графік функції перетинає вісь Oy в точці B(0;-4).

4. В області визначення дана функція є неперервною, тобто дана функція неперервна на всій числовій прямій.

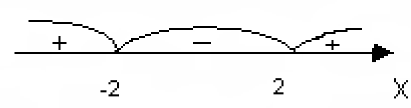
5. Дослідимо функцію на монотонність. Інтервали монотонності відокремлюються точками екстремуму та точками розриву функції.

Знаходимо похідну заданої функції:

$$y'=\left(-4\cdot\frac{(x+2)^2}{x^2+4}\right)'=-4\cdot\frac{2(x+2)\cdot 1\cdot(x^2+4)-(x+2)^2\cdot 2x}{\left(x^2+4\right)^2}=-4\cdot\frac{2(x+2)\left(x^2+4-x^2-2x\right)}{\left(x^2+4\right)^2}=$$
$$=\frac{-16(x+2)(2-x)}{\left(x^2+4\right)^2}$$

Знаходимо критичні точки функції:

$$\frac{-16(x+2)(2-x)}{\left(x^2+4\right)^2}=0\Rightarrow(x+2)(2-x)=0\Rightarrow x_1=-2,\ x_2=2.$$



Отримані дві критичні точки функції розбивають область визначення функції на проміжки. З'ясуємо знак похідної на кожному проміжку: похідна додатня на інтервалах (-∞;-2), (2;+∞), і від'ємна на інтервалі (-2;2).

Отже, функція зростає на інтервалах

(-∞;-2), (;+∞) і спадає на інтервалі (-2;2).

6. Знайдемо екстремуми функції. Оскільки при переході через критичну точку x=2, похідна функції змінює знак з мінуса на плюс, то точка x=2 є точкою мінімуму функції. Знайдемо мінімум функції:

$$y_{\min} = f(2) = -4 \cdot \frac{(2+2)^2}{(2)^2+4} = -4 \cdot \frac{16}{8} = -8.$$

Оскільки, при переході через критичну точку x=-2, похідна функції змінює знак з плюса на мінус, то точка x=-2 є точкою максимуму функції. Знайдемо максимум функції:

$$y_{\max} = f(-2) = -4 \cdot \frac{(-2+2)^2}{(-2)^2+4} = 0$$

7. Знаходимо інтервали опуклості та вгнутості кривої, що є графіком даної функції. Ці інтервали відокремлюються точками, в яких друга похідна дорівнює нулю, і точками розриву функції. Знайдемо похідну другого порядку і стаціонарні точки. Маємо:

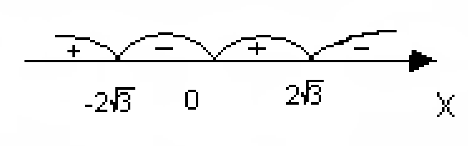
$$y'' = \left(\frac{-16(x+2)(2-x)}{\left(x^2+4\right)^2}\right)' = -16\left(\frac{4-x^2}{\left(x^2+4\right)^2}\right)' = -16 \cdot \frac{-2x \cdot \left(x^2+4\right)^2 - (4-x^2) \cdot 2\left(x^2+4\right) \cdot 2x}{\left(x^2+4\right)^4} =$$

$$= 16 \cdot 2x \cdot \frac{\left(x^2+4\right) + (4-x^2) \cdot 2}{\left(x^2+4\right)^3} = 32x \cdot \frac{\left(x^2+4\right) + 8 - 2x^2}{\left(x^2+4\right)^3} = 32x \cdot \frac{12-x^2}{\left(x^2+4\right)^3}$$

$y''=0$

$$\Rightarrow 32x \cdot \frac{12-x^2}{\left(x^2+4\right)^3} = 0 \Rightarrow x \cdot \left(12-x^2\right) = 0 \Rightarrow x = 0 \textit{ або } x^2 = 12 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2\sqrt{3},\ x_3 = -2\sqrt{3}$$

Маємо три стаціонарні точки функції, отже, отримаємо чотири інтервали на яких з'ясуємо знак другої похідної і відповідно інтервали опуклості та вгнутості функції. Дістанемо:



Функція вгнута на інтервалах $\left(-\infty;-2\sqrt{3}\right) \cup \left(0;2\sqrt{3}\right)$, оскільки на цих інтервалах $y''>0$.

Функція опукла на інтервалах $\left(-2\sqrt{3};0\right)\cup\left(2\sqrt{3};\infty\right)$, так як $y''<0$.

Точки $x_1=0,\ x_2=2\sqrt{3},\ x_3=-2\sqrt{3}$ є точками перегину графіка функції.

8. Знаходимо асимптоти кривої. Вертикальних асимптот функція не має. Шукатимемо похилі та горизонтальні асимптоти у вигляді

$$y=kx+b,\ \text{ де }\quad \mathrm{k}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\qquad b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right).$$

Маємо: $\mathrm{k}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-4(x+2)^2}{x\left(x^2+4\right)}=\infty$

Оскільки знайдена границя дорівнює нескінченності, то задана крива не має похилої та горизонтальної асимптоти.

9. Будуємо графік даної функції, використовуючи результати дослідження (рис. 1).

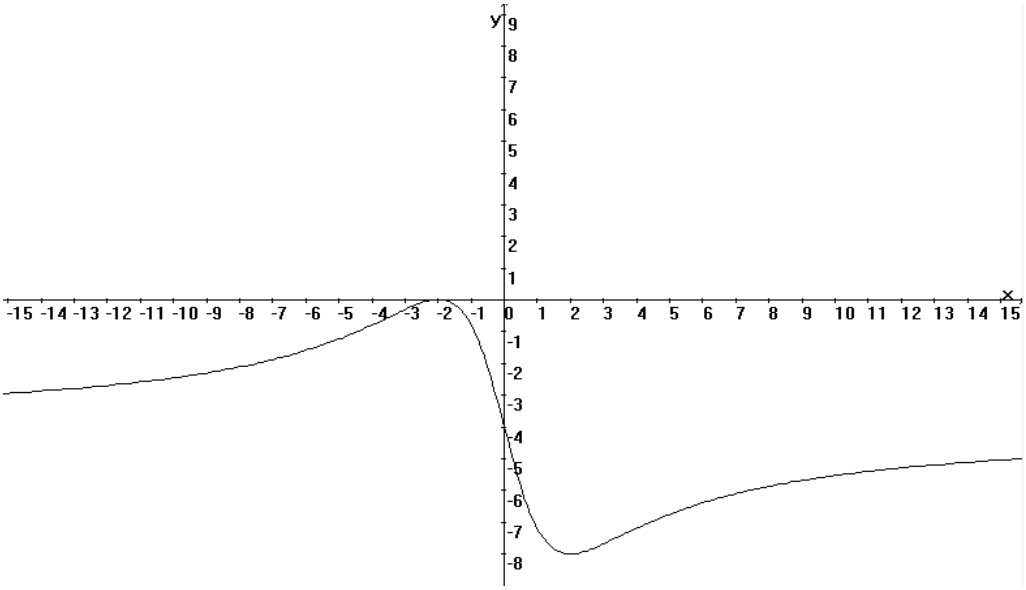


Рис. 1 Графік досліджуваної функції

Питання для самоконтролю:

- Дайте означення області визначення функції.
- Яка функція називається парною (непарною)?
- Як дослідити функцію на парність (непарність)?
- Яка функція називається періодичною?
- Що таке нулі функції?
- Яка функція називається зростаючою (спадною) на проміжку?
- Як знайти проміжки зростання (спадання) функції?
- Що називається екстремумом функції? Сформулюйте правило дослідження функції на екстремум.
- Яка крива називається опуклою (вгнутою) на інтервалі?
- Дайте означення точок перегину.
- Сформулюйте правило знаходження інтервалів опуклості, вгнутості та точок перегину.
- Які види асимптот графіка ви знаєте? Як їх знайти?