Самостійна робота №12.

Тема: Диференціювання функцій двох змінних. (2год.)

Методичні рекомендації:

Опрацювати рекомендовану літературу за планом:

1. Частинні похідні першого порядку. Повний диференціал.
2. Частинні похідні вищих порядків.

1. Частинні похідні першого порядку. Повний диференціал

До цього часу ми розглядали функції однієї змінної $y=f(x)$

Якщо кожній парі чисел (x,y) з площини XOY, за деяким правилом (законом) ставиться у відповідність величина z,то кажуть, що z є ***функція незалежних змінних*** x і y з області визначення D

$$z=f(x,y)$$

Функцію z двох змінних можна задавати за допомогою таблиці, наприклад

y / x	1	2	3
1	1	2	3
2	2	4	6

Сукупність пар (x,y), для яких визначена функція $z=f(x,y)$, називають *областю визначення* функції.

Функція $z=f(x,y)$ описує поверхню в просторі.

Можна розглядати функцію n змінних $y=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$, x_i -незалежна змінна.

Частинною похідною по x від функції $z=f(x,y)$, називають границю відношення частинного приросту Δz до приросту Δx,при $\Delta x\to 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x+\Delta x,y\right)-f\left(x,y\right)}{\Delta x}$$

і позначають $\frac{\partial z}{\partial x}$, або $\frac{\partial f}{\partial x}$, або z'_x, або f'_x.

Аналогічно, частинна похідна по y від функції $z=f(x,y)$ визначається

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f\left(x,y+\Delta y\right)-f\left(x,y\right)}{\Delta y}$$

і позначають $\frac{\partial z}{\partial y}$, або $\frac{\partial f}{\partial y}$, або z'_y, або f'_y.

Зауважимо ,що Δxz визначається при сталому y, а Δyz – при сталому x. Тому означення частинних похідних можна сформулювати так : *частинною похідною* по x, від функції $z=f(x,y)$,називається похідна по x в припущенні ,що $y=const$; *частинною похідною* по y, від функції $z=f(x,y)$, називається похідна по y в припущенні, що $x=const$.

Із цього означення зрозуміло, що правила обчислення частинних похідних співпадають з правилами, вказаними для функцій однієї змінної, і лише треба пам’ятати за якою змінною шукається похідна.

Якщо dx, dy – диференціали незалежних змінних, то *повний диференціал* функції двох змінних дорівнює

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

2. Частинні похідні вищих порядків

Нехай маємо функцію $z=f(x,y)$. Частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x} = f_x^{'}(x,y)$ та $\frac{\partial z}{\partial y} = f_y^{'}(x,y)$ взагалі кажучи, є функціями від x та y. Тому від них теж можна брати частинні похідні , як по x так і по y

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f_{xx}^{''}(x,y)$ – друга похідна по x;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f_{yx}^{''}(x,y)$– спочатку функцію диференціюємо по y, а потім отриману функцію диференціюємо по x (змішана частина похідна).

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f_{xy}^{''}(x,y)$– спочатку функцію диференціюємо по x, а потім отриману функцію диференціюємо по y.

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f_{yy}^{''}(x,y)$ – друга похідна по y.

Аналогічно похідні другого порядку можна диференціювати як по x, так і по y.

Теорема. Якщо функція $z=f(x,y)$ і її частинні похідні $f_x^{'}, f_y^{'}, f_{yx}^{''}, f_{xy}^{''}$ визначені і неперервні в точці $M\ (x,y)$, то в деякому околі цієї точки

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \quad (f''_{yx} = f''_{xy})$$

Рекомендована література:

1. Бубняк Т.І. Вища математика: Навчальний посібник. – Львів: "Новий світ–2000",2004, с.118-120.

2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.:А.С.К., 2001, с.294-297.

Завдання для виконання:

Завдання 1. *Знайдіть частинні похідні першого та другого порядків для заданих функції*

1. $z = xy$
2. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$
3. $z = \frac{x^2}{y^2}$
4. $z = \ln\left(x + 5y^2\right)$
5. $z = xy\cos xy$

Завдання 2. *Перевірте рівність* $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ *для функцій*

1. $z = x^2 \sin y$
2. $z = x \ln \frac{y}{x}$

Приклади розв'язування вправ:

Приклад 1. *Знайти частинні похідні першого та другого порядків для заданої функції*

$$z=\ln\left(x+5y^2\right)$$

Розв'язання.

Спочатку знайдемо частинні похідні першого порядку для заданої функції

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x+5y^2}\cdot\left(x+5y^2\right)'_x=\frac{1}{x+5y^2}\cdot(1+0)=\frac{1}{x+5y^2};$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x+5y^2}\cdot\left(x+5y^2\right)'_y=\frac{1}{x+5y^2}\cdot(0+10y)=\frac{10y}{x+5y^2}.$$

Знайдемо частинні похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(\frac{1}{x+5y^2}\right)'_x=-\frac{1}{\left(x+5y^2\right)^2};$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(\frac{1}{x+5y^2}\right)'_y=-\frac{1}{\left(x+5y^2\right)^2}\cdot(1+10y)=-\frac{1+10y}{\left(x+5y^2\right)^2};$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\left(\frac{10y}{x+5y^2}\right)'_x=-\frac{10y}{\left(x+5y^2\right)^2}\cdot 1=-\frac{10y}{\left(x+5y^2\right)^2};$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{10y}{x+5y^2}\right)'_y=\frac{10\left(x+5y^2\right)-10y\cdot 10y}{\left(x+5y^2\right)^2}=\frac{10x+50y^2-100y^2}{\left(x+5y^2\right)^2}=\frac{10x-50y^2}{\left(x+5y^2\right)^2}.$$

Приклад 2. *Перевірити рівність* $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ *для функції*

$$z=x^2y+y^3$$

Розв'язання.

Знайдемо спочатку частинні похідні першого порядку

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy;\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=x^2+3y^2.$$

Знайдемо похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ і порівняємо їх

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2x + 0 = 2x.$$

Як бачимо $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2x$.

Питання для самоконтролю:

- Дайте означення частинної похідної функції двох змінних по одній з них? З'ясуйте її геометричний зміст.
- Як визначають частинні похідні другого порядку від функції двох змінних?
- Сформулюйте теорему про рівність других мішаних похідних.
- Дайте означення повного диференціала функції двох змінних і вкажіть формулу для його знаходження.
- Узагальніть формулу повного диференціала для функції *n* змінних.