Самостійна робота №14.

Тема: Деякі застосування частинних похідних. (2год.)

Методичні рекомендації:

Опрацювати рекомендовану літературу за планом:

1. Похідна за напрямом. Градієнт (законспектувати).
2. Розв'язування вправ на знаходження повного диференціала, частинних похідних вищих порядків, найбільшого та найменшого значення функції.
3. Економічні застосування частинних похідних.

1. Похідна за напрямом. Градієнт

Означення. Нехай функція $z = f(x; y)$ визначена в деякому околі точки $P_0(x_0; y_0)$; l — деякий промінь з початком у точці $P_0(x_0; y_0)$; $P(x; y)$ — точка на цьому промені, яка належить околу, що розглядається (рис. 1); Δl — довжина відрізка P_0P. Границя $\lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{f(P) - f(P_0)}{\Delta l}$, якщо вона існує, називається ***похідною функції*** $z = f(x; y)$ ***за напрямом*** $\vec{l}$ ***у точці*** P_0 і позначається $\dfrac{\partial z}{\partial l}$.

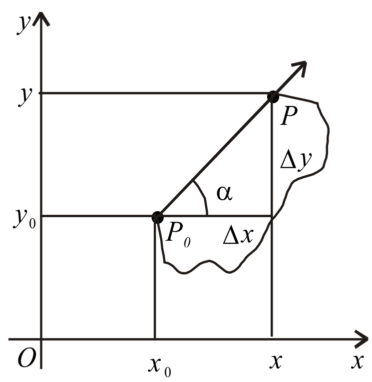


Рис. 1

Зокрема, $\frac{\partial z}{\partial x}$ є похідна функції $z = f(x; y)$ за додатним напрямом осі Ox, а $\frac{\partial z}{\partial y}$ — похідна функції $z = f(x; y)$ за додатним напрямом осі Oy.

Похідна за напрямом $\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}$ *характеризує швидкість змінювання функції* $z = f(x; y)$ у точці $P_0(x_0; y_0)$ за напрямом $\vec{l}$.

Теорема. *Якщо функція* $z = f(x; y)$ *має в точці* $P_0(x_0; y_0)$ *неперервні частинні похідні, тоді в цій точці існує похідна* $\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}$ *за будь-яким напрямом* $\vec{l} = (\cos\alpha;\ \cos\beta)$*, причому*

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0} \cos\beta,$$

де $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0}$ *і* $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0}$ *— значення частинних похідних функції* $z = f(x; y)$ *у точці* $P_0(x_0; y_0)$.

2. Знаходження повного диференціала, частинних похідних вищих порядків, найбільшого та найменшого значення функції.

Повний диференціал та частинні похідні першого порядку.

Головна лінійна частина приросту функції, тобто $A\Delta x + B\Delta y$, називається ***повним диференціалом функції*** (точніше першим диференціалом) двох змінних $f(x;\ y)$ у точці $(x_0,\ y_0)$ і позначається dz:

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

Означення. Нехай функція $z = f(x;\ y)$ визначена в точці $(x_0;\ y_0)$ і в її деякому околі. ***Частинною похідною* по змінній *x*** від функції $z = f(x;\ y)$, називають границю відношення частинного приросту $\Delta_x z$ до приросту Δx,при $\Delta x \to 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

і позначають $\frac{\partial z}{\partial x}$, або $\frac{\partial f}{\partial x}$, або z'_x, або f'_x.

Аналогічно, ***частинна похідна по y*** від функції $z = f(x;\ y)$ визначається

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

і позначають $\frac{\partial z}{\partial y}$, або $\frac{\partial f}{\partial y}$, або z'_y, або f'_y.

Із означення частинних похідних зрозуміло, що вони шукаються за тими правилами, що й похідні функції однієї змінної. Треба лише пам’ятати, що при знаходженні z'_x y вважається **сталою**, а при знаходженні z'_y змінна x вважається **сталою**.

Повний диференціал функції $z = f(x; y)$ можна обчислити за формулою

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

Частинні похідні вищих порядків.

Нехай маємо функцію $z = f(x;\ y)$. Частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$ та $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$ взагалі кажучи, є функціями від x та y. Тому від них теж можна брати частинні похідні , як по x так і по y:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f''_{xx}(x,y)$$ – друга похідна по *x;*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f''_{yx}(x,y)$$– спочатку функцію диференціюємо по *y*, а потім отриману функцію диференціюємо по *x* (змішана частина похідна).

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f''_{xy}(x,y)$$– спочатку функцію диференціюємо по *x*, а потім отриману функцію диференціюємо по *y*.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f''_{yy}(x,y)$$ – друга похідна по *y.*

Аналогічно визначаються і позначаються частинні похідні третього і вищих порядків

Теорема. *Якщо функція* $z=f(x;\ y)$ *і її частинні похідні* $f'_x,\ f'_y,\ f''_{yx},\ f''_{xy}$ *визначені і неперервні в точці M(x,y) , то в деякому околі цієї точки*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\quad (\ f''_{yx}=f''_{xy}\ )$$

Означення. *Диференціалом другого порядку* від функції $z=f(x;y)$ називається диференціал від її повного диференціала першого порядку, тобто $d^2z=d(dz)$.

Найбільше та найменше значення функції багатьох змінних.

Відомо, що функція *z=f(x,y)* задана і неперервна в замкненій та обмеженій області D, досягає в цій області найбільшого і найменшого значення.

У внутрішніх точках області диференційована функція може набувати цих значень лише в точках локального екстремуму. Тому треба знайти всі стаціонарні точки функції, які належать області D, розв'язавши систему рівнянь $f'_x(x,y)=0,\ f'_y(x,y)=0$, і обчислити значення функції в цих точках.

Потім потрібно дослідити і обчислити функцію на екстремум на межі області D. Використовуючи рівняння межі, цю задачу зводять до знаходження абсолютного екстремуму функції однієї змінної.

Серед здобутих таким чином значень функції всередині і на межі області вибирають найбільше і найменше значення.

Зауваження. Загального методу знаходження найбільшого і найменшого значень для довільної неперервної функції в замкненій та обмеженій області D немає.

Рекомендована література:

1. Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика для економістів. – К.: ЦУЛ,2002, с.245-249, 257-262.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.:А.С.К., 2001, с.310-318, 324-326.

Завдання для виконання:

Завдання 1. *Знайти повний диференціал функції*

1) $z=x^3y^2(1-x-y)$

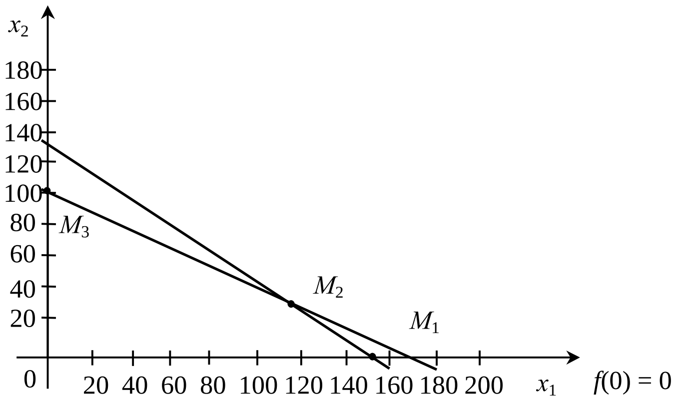
2) $z=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$

Завдання 2. *Розв'яжіть задачу згідно свого варіанту (*№ варіанту – остання цифра порядкового номера по журналу*).*

Задача. Знайти найменше та найбільше значення функції $z = f(x, y)$ в заданій замкненій області

1. $z = x^2 + y^2 - 4xy - 4$ у квадраті $0 \le x \le 4, \quad 0 \le y \le 4$
2. $z = x^2 - y^2 + 4xy - 6x - 2y$ у трикутнику, обмеженому координатними осями Ox та Oy та прямою $y = 4 - x$
3. $z = x^2 + 2y^2 + 4xy + 1$ у квадраті $-1 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2$
4. $z = xy - 2x - y$ у прямокутнику $0 \le x \le 3, \quad 0 \le y \le 4$
5. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$ у трикутнику, обмеженому координатними осями Ox та Oy та прямою $x + y = 3$
6. $z = x^3 + y^3 - 3xy - 2$ у прямокутнику $0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 3$
7. $z = x^3 + y^3 - 3xy$ у квадраті $0 \le x \le 4, \quad 0 \le y \le 4$
8. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x + 5$ у трикутнику, обмеженому координатними осями Ox та Oy та прямою $x + y = 2$
9. $z = x^2 + xy - 3x - y$ у прямокутнику $0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 3$
10. $z = x^2 + y^2 - 4xy - 2$ у квадраті $-2 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 4$

Завдання 3. Підприємство випускає вироби двох типів, послідовно обробляючи їх спочатку в цеху *A*, а потім у цеху *B*.



Обробка кожного виробу першого типу триває 7 год у цеху *A* та 5 год у цеху *B*; обробка кожного виробу другого типу триває 8 год у цеху *A* та 9 год у цеху *B*. Цех *A* може працювати протягом кварталу не більш як 1100 годин, а цех B — не більш як 900 год. Відомо, що підприємство за кожний із виробів першого та другого типу дістає прибуток відповідно 200 і 300 у. о. Визначити, скільки виробів кожного типу потрібно випускати за квартал, щоб забезпечити найбільший прибуток.

Приклади розв'язування вправ:

Приклад 1. Знайти повний диференціал для функції $z = \ln(x + \ln y)$.

Розв'язання.

Повний диференціал функції двох змінних знаходиться за формулою

$$dz = z'_x dx + z'_y dy \text{, де}$$

$$z'_x = \frac{1}{x + \ln y}; \quad z'_y = \frac{1}{x + \ln y} \cdot \frac{1}{y}.$$

Отже, $dz = \dfrac{1}{x + \ln y}\left(dx + \dfrac{1}{y}dy\right)$.

Приклад 2. Знайти частинні похідні першого та другого порядків для заданої функції

$$z = \ln\left(x + 5y^2\right)$$

Розв'язання.

Спочатку знайдемо частинні похідні першого порядку для заданої функції

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x + 5y^2} \cdot \left(x + 5y^2\right)'_x = \frac{1}{x + 5y^2} \cdot (1 + 0) = \frac{1}{x + 5y^2};$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x + 5y^2} \cdot \left(x + 5y^2\right)'_y = \frac{1}{x + 5y^2} \cdot (0 + 10y) = \frac{10y}{x + 5y^2}.$$

Знайдемо частинні похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(\frac{1}{x+5y^2}\right)'_x=-\frac{1}{(x+5y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(\frac{1}{x+5y^2}\right)'_y=-\frac{1}{(x+5y^2)^2}\cdot(1+10y)=-\frac{1+10y}{(x+5y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\left(\frac{10y}{x+5y^2}\right)'_x=-\frac{10y}{(x+5y^2)^2}\cdot 1=-\frac{10y}{(x+5y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{10y}{x+5y^2}\right)'_y=\frac{10(x+5y^2)-10y\cdot 10y}{(x+5y^2)^2}=\frac{10x+50y^2-100y^2}{(x+5y^2)^2}=\frac{10x-50y^2}{(x+5y^2)^2}.$$

Приклад 3. Знайти найменше та найбільше значення функції $z=2x^3+4x^2+y^2-2xy$ в області, обмеженій параболою $y=x^2$, прямою *y=4* та віссю *Oy (x≥0).*

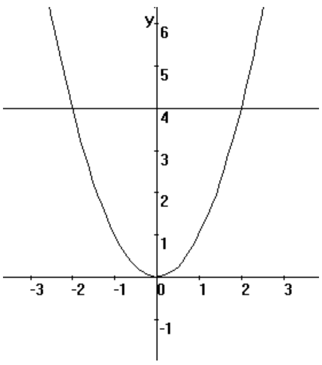


Рис.1

Розв'язання.

Зобразимо на рисунку область D, обмежену параболою $y=x^2$, прямою *y=4* та віссю *Oy (x≥0)* (Рис.1).

Знаходимо стаціонарні точки функції. Маємо

$$Z'_x=6x^2+8x-2y$$
$$Z'_y=2y-2x$$

Згідно з необхідними умовами існування екстремуму функції двох змінних одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases}6x^2+8x-2y=0\\2y-2x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6x^2+8x-2y=0\\2y=2x\end{cases}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 6x^2+8x-2x=0\Rightarrow 6x^2+6x=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x(x+1)=0\Rightarrow x_1=0,\ x_2=-1.$$

В середині області D $x \geq 0$, тому $\begin{cases} x = 0 \\ y = x = 0 \end{cases}$.

Стаціонарна точка O(0;0) належить області D, тому обчислюємо значення $Z(O) = 2 \cdot 0^3 + 4 \cdot 0^2 + 0^2 - 2 \cdot 0 \cdot 0 = 0$.

Тепер проведемо дослідження функції на межі області D. Рівняння сторони OA *x=0* , і на відрізку OA функція Z приймає вигляд $Z = y^2$. Знайдемо найбільше і найменше значення цієї функції однієї змінної y на замкненому відрізку $[0;4]$: $Z = y^2$; $Z' = 2y \Rightarrow Z' = 0 \Rightarrow 2y = 0 \Rightarrow y = 0$.

Отже, $Z(A) = 0$.

Аналогічно знаходимо найбільше і найменше значення функції Z на відрізку AB: $y = 4,\ x \in [0;2]$. Маємо

$$Z = 2x^3 + 4x^2 + 4^2 - 2 \cdot x \cdot 4 = 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16$$

$$Z' = 6x^2 + 8x - 8 \Rightarrow Z' = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{2}{3},\ x_2 = -2 \notin [0;2]$$

Звідси

$$Z(M) = Z\left(\frac{2}{3}\right) = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 8 \cdot \frac{2}{3} + 16 = \frac{16 + 48 - 432}{27} + 16 = -13\frac{11}{27} + 16 = 2\frac{16}{27}$$

$$Z(B) = Z(2) = 2 \cdot (2)^3 + 4 \cdot (2)^2 - 8 \cdot 2 + 16 = 16 + 16 - 16 + 16 = 32$$

Знайдемо найбільше і найменше значення функції Z на кривій OB. На параболі $y = x^2$ функція Z приймає вигляд

$$Z = 2x^3 + 4x^2 + x^4 - 2x^3 = x^4 + 4x^2,\ x \notin [0;2].$$

$$Z' = 4x^3 + 8x \Rightarrow Z' = 0 \Rightarrow 4x(x^2 + 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Звідси $Z(0) = 0$.

Отже, задана функція Z має найбільше значення в точці В(2;4), найменше значення в точці О(0;0) на межі області.

$$\max_D Z = Z(B) = Z(2;4) = 32$$
$$\min_D Z = Z(O) = Z(0;0) = 0$$

Приклад 4. Виробництво цементу x_i (у сотнях тонн) і витрати електроенергії y_i (на 1 тонну цементу за рік) за визначений період роботи цементної промисловості характеризуються значеннями, які зведено в такій таблиці:

i	x_i	y_i
1	8	80
2	10	72
3	12	65
4	13,5	70
5	14	68

Знайти пряму, яка відбиває залежність y від x.

Розв'язання.

Складаємо таку таблицю:

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1	8	80	640	64
2	10	72	720	100
3	12	65	780	144

4	13,5	70	945	182,25
5	14	68	952	196
Сума	57,5	355	4037	686,25

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 57{,}5, \quad \sum_{i=1}^{5} y_i = 355, \quad \sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 4037, \quad \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 686{,}25.$$

Отже, необхідна умова існування мінімуму суми квадратів відхилень подається так:

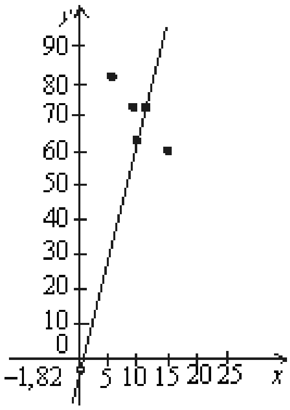


Рис.2

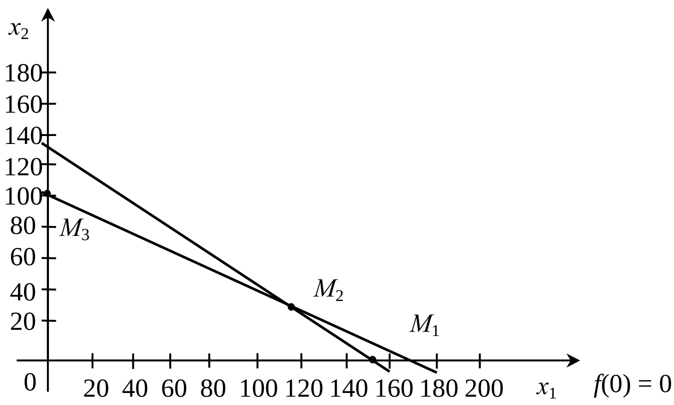
$$\begin{cases} 5a + 57{,}5b = 355 \\ 57{,}5a + 686{,}25b = 4037 \end{cases}$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 355 & 57{,}5 \\ 4037 & 686{,}25 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 57{,}5 \\ 57{,}5 & 686{,}25 \end{vmatrix}} = 11{,}93,$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 355 \\ 57{,}5 & 4037 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 57{,}5 \\ 57{,}5 & 686{,}25 \end{vmatrix}} = -1{,}82.$$

Таким чином, шукана пряма є $y = 11{,}93x - 1{,}82$ (рис. 2).

Приклад 4. Підприємство випускає вироби двох типів, послідовно обробляючи їх спочатку в цеху *A*, а потім у цеху *B*.



Обробка кожного виробу першого типу триває 7 год у цеху *A* та 5 год у цеху *B*; обробка кожного виробу другого типу триває 8 год у цеху *A* та 9 год у цеху *B*. Цех *A* може працювати протягом кварталу не більш як 1100 годин, а цех *B* — не більш як 900 год. Відомо, що підприємство за кожний із виробів першого та другого типу дістає прибуток відповідно 200 і 300 у. о. Визначити, скільки виробів кожного типу потрібно випускати за квартал, щоб забезпечити найбільший прибуток.

Розв'язання.

Нехай x_1, x_2 — кількість виробів відповідно першого та другого типу. Прибуток від їх продажу подається функцією $f(x_1, x_2) = 200x_1 + 300x_2$, причому змінні x_1, x_2 задовольняють нерівності

$$\begin{cases} 7x_1 + 8x_2 \le 1100, \\ 5x_1 + 9x_2 \le 900, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Функція $f(x_1, x_2) = 200x_1 + 300x_2$ – лінійна, а тому свого максимального значення вона набуває в одній із вершин многокутника $OM_1M_2M_3$, де $O(0,\ 0)$, $M_1\left(157\frac{1}{7},\ 0\right)$, $M_2\left(117\frac{9}{23},\ 34\frac{20}{23}\right)$, $M_3(0,\ 100)$. У розглядуваній задачі змінні x_1 та x_2 набувають цілих значень. Отже,

$$f(0) = 0; \quad f(M_2) = 33\,600;$$

$$f(M_1) = 31\,400, \quad f(M_3) = 30\,000.$$

Звідси випливає, що максимальне значення функції досягається в точці M_2. Кількість виробів першого типу буде 117, а другого — 34. При цьому цехи A та B простоюватимуть відповідно, год:

$$1100 - (7 \cdot 117 + 8 \cdot 34) = 9,$$
$$900 - (5 \cdot 117 + 9 \cdot 34) = 9.$$

За цей час у цих цехах можна виготовити ще один виріб другого типу; отже, щоб отримати максимальний прибуток, виробів першого типу треба виготовити 117 шт., а другого — 35 шт.

Питання для самоконтролю:

- Що характеризують і за якими формулами знаходять похідну за напрямом та градієнт функції трьох та двох змінних?
- В чому полягає фізичний зміст похідної за напрямом?
- Як позначають та знаходять повний диференціал, повний приріст функції?
- Для чого використовується поняття повного диференціала? В чому полягає його геометричний зміст?
- Як позначають та знаходять частинні похідні першого та вищих порядків?
- Як знайти найбільше і найменше значення функції багатьох змінних в замкненій області?