Самостійна робота №15.

Тема: Обчислення невизначених інтегралів. (2год.)

Методичні рекомендації:

Опрацювати рекомендовану літературу за планом:

1. Первісна та невизначений інтеграл. Властивості інтегрування. Таблиця інтегралів.
2. Основні методи інтегрування: безпосереднє інтегрування, підстановка, інтегрування за частинами.
3. Застосування основних методів інтегрування до розв'язування вправ.

1. Первісна та невизначений інтеграл. Властивості інтегрування. Таблиця інтегралів.

Функція F називається ***первісною*** для функції $f(x)$ на заданому проміжку, якщо для всіх x з цього проміжку справедлива рівність

$$F'(x) = f(x). \qquad (1)$$

У загальному випадку, якщо $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то для будь-якої сталої C функція $F(x)+C$ також є первісною для функції $f(x)$. Дійсно,

$$(F(x)+C)' = F'(x) = f(x) \qquad (2)$$

для будь-якого x з розглядуваного проміжку.

Отже, якщо функція має хоча б одну первісну, то вона має безліч первісних, що відрізняються на довільну сталу.

Сукупність усіх первісних функцій $F(x)+C$ для диференціала $f(x)dx$ називається ***невизначеним інтегралом*** і позначається $\int f(x)dx$

Таким чином можна записати

$$\int f(x)dx = F(x)+C, \qquad (3)$$

де $f(x)dx$ називається *підінтегральним виразом, $f(x)dx$* –підінтегральний вираз,

$\int$ - знак невизначеного інтеграла.

Основні властивості невизначеного інтеграла.

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \qquad (4)$$

2. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу

$$d\int f(x)dx = f(x)dx \qquad (5)$$

3. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює цій функції плюс довільна стала

$$\int dF(x) = F(x) + C \qquad (6)$$

4. Сталий множник можна винести за знак інтеграла

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \qquad (7)$$

5. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченого числа функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів цих функцій

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + ... + \int f_n(x)dx \quad (8)$$

Таблиця інтегралів.

1. $\int kdx = kx + C$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

4. $\int \cos xdx = \sin x + C$

5. $\int \sin xdx = -\cos x + C$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4. $\int e^x dx = e^x + C$

9. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \ \ a > 0$

11. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C, \ \ a \neq 0$

12. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \ \ a \neq 1$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C, \ \ a \neq 0$

2. Основні методи інтегрування: безпосереднє інтегрування, підстановка, інтегрування за частинами.

Основними методами інтегрування є безпосереднє інтегрування, метод підстановки та інтегрування частинами.

1. Метод безпосереднього інтегрування.

Обчислення інтегралів за допомогою основних властивостей невизначеного інтеграла і таблиці інтегралів називають *безпосереднім інтегруванням.*

2. Метод підстановки (заміни змінної).

Суть цього методу полягає у введенні нової змінної інтегрування. Він ґрунтується на такій теоремі.

Теорема. Нехай $F(x)$ - первісна функції $f(x)$ на проміжку $\langle a;\ b\rangle$, т/б $\int f(x)dx = F(x)+C,\ x\in\langle a;\ b\rangle$, і нехай функція $x=\varphi(t)$ визначена і диференційована на проміжку $\langle\alpha;\ \beta\rangle$, причому множина значень цієї функції є проміжок $\langle a;\ b\rangle$. Тоді справедлива формула

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))+C,\ t\in\langle\alpha;\beta\rangle.$$

Теорема застосовується як правило таким чином:

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \left|\begin{matrix}\varphi(x)=u\\ \varphi'(x)dx=du\end{matrix}\right| = \int f(u)du = = F(u)+C = F(\varphi(x))+C$$

3. Метод інтегрування частинами.

Нехай $u=u(x)$, $v=v(x)$ - функції, що мають на деякому проміжку неперервні похідні. Тоді $\int udv = uv-\int vdu$.

Іноді формулу доводиться застосовувати декілька разів. Основні типи інтегралів, які зручно обчислювати методом інтегрування за частинами:

1) $\int P(x)e^{kx}dx, \int P(x)\sin kxdx, \int P(x)\cos kxdx$, де $P(x)$- многочлен, k - дійсне число. $\Rightarrow u=P(x)$.

2) $\int P(x)\ln xdx, \int P(x)\arcsin xdx, \int P(x)\arccos xdx, \int P(x)arctgxdx \Rightarrow dv=P(x)dx$.

3) $\int e^{\alpha x}\sin\beta xdx, \int e^{\alpha x}\cos\beta xdx$, де $\alpha,\ \beta$- дійсні числа. Після двократного застосування формули утворюється лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла.

Рекомендована література:

1. Бубняк Т.І. Вища математика: Навчальний посібник. – Львів: “Новий світ–2000”,2004, с.133-141.

2. Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика для економістів. – К.: ЦУЛ,2002, с.268-283.

3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.:А.С.К., 2001, с.310-318, 330-342.

4. Пастушенко С.М., Підченко Ю.П. Вища математика. Довідник для студентів вищих навч.закладів: Навч. посібник. 2-е вид., виправлене і доповн. -К.: Діал.,2003, с.202-215.

Завдання для виконання:

Розв’язати приклади згідно свого варіанту (№ варіанту – остання цифра порядкового номеру по журналу):

Знайти неозначені інтеграли. Результати перевірити диференціюванням.

1) а) $\int \frac{x^2}{1+x^6}dx$, б) $\int e^{\sin 3x}\cos 3x dx$, в) $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$,

2) а) $\int e^{-x^4}x^3 dx$, б) $\int \frac{5x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx$ с, в) $\int x^4 \ln x dx$,

3) а) $\int \sqrt[5]{4-5\sin 2x}\cos 2x dx$, б) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$, в) $\int xe^{2x}dx$,

4) а) $\int \frac{e^{ctg 2x}}{\sin^2 2x}dx$, б) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$, в) $\int \sqrt[3]{x}\ln x dx$,

5) а) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^3}}dx$, б) $\int e^{x^2+3}x dx$, в) $\int x^2 \ln x dx$,

6) а) $\int ctg 5x dx$, б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$, в) $\int xe^{3x}dx$,

7) $а)\ \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dx$, $б)\ \int \frac{e^{3x}}{\left(1+e^{3x}\right)^2}dx$, $в)\ \int xe^{-4x}dx,$

8) $а)\ \int \sin^3 x\cos x dx,$ $б)\ \int \sqrt{2+3\cos 4x}\sin 4x dx$, $в)\ \int x\sin 2x dx$,

9) $а)\ \int \frac{x^3}{1+x^8}dx$, $б)\ \int \frac{\sqrt{arctg\,2x}}{1+4x^2}dx$, $в)\ \int \arcsin 2x dx$,

10) $а)\ \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx,$ $б)\ \int \frac{1}{x\sqrt{\ln x+3}}dx$, $в)\ \int \frac{\ln x}{x^2}dx$

Приклади розв'язування вправ:

Приклад. Знайти неозначені інтеграли. Результати перевірити диференціюванням.

а) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}dx$

Використовуючи метод підстановки та таблицю інтегралів, дістанемо:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}dx = \left| \begin{array}{l} u=1-x^4 \\ du=-4x^3dx \\ \frac{du}{-4}=x^3dx \end{array} \right| = \int \frac{du}{-4\sqrt{u}} = -\frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{u}+C = -\frac{\sqrt{1-x^4}}{2}+C$$

Отриманий результат перевіримо диференціюванням

$$\left(-\frac{\sqrt{1-x^4}}{2}+C\right)' = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^4}}\cdot\left(1-x^4\right)' = -\frac{1}{4\sqrt{1-x^4}}\cdot\left(-4x^3\right) = \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}$$

б) $\int \frac{\lg(x+3)}{x+3}dx$

Використовуючи метод підстановки та таблицю інтегралів, дістанемо:

$$\int \frac{\lg(x+3)}{x+3}dx = \left| \begin{array}{l} u = \lg(x+3) \\ du = \frac{1}{x+3}\cdot \lg e dx \\ \frac{du}{\lg e} = \frac{dx}{x+3} \end{array} \right| = \int \frac{udu}{\lg e} = \frac{1}{\lg e}\cdot \frac{u^2}{2} + C = \frac{(\lg(x+3))^2}{2\lg e} + C$$

Отриманий результат перевіримо диференціюванням

$$\left(\frac{(\lg(x+3))^2}{2\lg e} + C \right)' = \frac{1}{2\lg e}\cdot 2\lg(x+3)\cdot(\lg(x+3))' = \frac{\lg(x+3)}{\lg e}\cdot\frac{1}{x+3}\cdot \lg e = \frac{\lg(x+3)}{x+3}$$

в) $\int x\sin 4x dx$

Використавши формулу інтегрування за частинами отримаємо:

$$\int x\sin 4x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \sin 4x dx & v = \int \sin 4x dx = -\frac{\cos 4x}{4} \end{array} \right| = x\cdot\left(-\frac{\cos 4x}{4}\right) - \int -\frac{\cos 4x}{4}dx =$$
$$= -\frac{x\cos 4x}{4} + \frac{\sin 4x}{16} + C$$

Отриманий результат перевіримо диференціюванням

$$\left(-\frac{x\cos 4x}{4} + \frac{\sin 4x}{16} + C \right)' = -\frac{1}{4}(1\cdot\cos 4x + x(-\sin 4x)\cdot 4) + \frac{1}{16}\cdot\cos 4x\cdot 4 = -\frac{\cos 4x}{4} + x\sin 4x +$$
$$+ \frac{\cos 4x}{4} = x\sin 4x$$

Питання для самоконтролю:

- Що називається первісною даної функції? Наведіть приклади.
- Сформулюйте теорему про загальний вигляд первісної для даної функції.

- Дайте означення невизначеного інтеграла.
- Які властивості невизначеного інтеграла ви знаєте?
- У чому полягають методи безпосереднього інтегрування, інтегрування частинами і заміни змінної?
- Які типи інтегралів зручно обчислювати методом інтегрування за частинами?