Самостійна робота №16.

Тема: Інтегрування раціональних функцій. (2год.)

Методичні рекомендації:

Опрацювати рекомендовану літературу за планом:

1. Інтегрування найпростіших раціональних дробів (зробити конспект).
2. Інтегрування раціональних функцій.
3. Розв'язування вправ.

1. Інтегрування найпростіших раціональних дробів.

Означення. Відношення двох многочленів $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називається *раціональним дробом.*

Означення. Раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називається *правильним*, якщо степінь многочлена в чисельнику менший від степеня многочлена в знаменнику, тобто $n < m$; якщо $n \geq m$, то дріб називається *неправильним*.

Теорема 5. *Будь-який неправильний раціональний дріб можна подати у вигляді суми многочлена (цілої частини) та правильного раціонального дробу.*

Означення. За домовленістю *найпростішими раціональними дробами* називаються такі дроби чотирьох типів:

I. $\frac{A}{x-a}$; II. $\frac{A}{(x-a)^k}$; III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$; IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$,

де $k \ge 2, k \in N, D = p^2 - 4q < 0$, інтеграли від яких мають вигляд

I. $\int \frac{Adx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C$;

II. $\int \frac{Adx}{(x-a)^k} = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^2} = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C$;

III. $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{Ax+B}{a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right)}dx = \left| k^2 = \left|\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right|, x+\frac{b}{2a} = t \right| =$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{A\left(t-\frac{b}{2a}\right)+B}{t^2 \pm k^2}dt = \frac{A}{2a}\int \frac{2tdt}{t^2 \pm k^2} + \frac{2aB + A\cdot b}{2a^2}\int \frac{dt}{t^2 \pm k^2} = \frac{A}{2a}\int \frac{d(t^2 \pm k^2)}{t^2 \pm k^2} + \frac{2ab - Ab}{2a^2}\cdot I =$$

$$= \frac{A}{2a}\ln\left| x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right| + \frac{2aB + A\cdot b}{2a^2}\cdot I .$$

Інтеграл I залежно від знака дискримінанта $D = b^2 - 4ac$ буде таким:

$$I = \int \frac{dt}{t^2 \pm k^2} = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2k}\ln\left|\frac{t-k}{t+k}\right| + C = \frac{1}{2k}\ln\left|\frac{x+\frac{b}{2a}-k}{x+\frac{b}{2a}+k}\right| + C, D > 0; \\ \frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{t}{k} + C = \frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{b}{2a}}{k} + C, D < 0; \\ -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{x+\frac{b}{2a}} + C, D = 0. \end{array} \right.$$

IV. $\int \frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^k}$ — інтегрується за допомогою рекурентних формул.

Теорема. *Будь-який правильний раціональний нескоротний дріб* $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ $(n < m)$ *можна подати у вигляді скінченної кількості найпростіших дробів, використовуючи такі правила:*

1). Якщо $Q_m(x)=(x-a)^k\cdot g_{m-k}(x)$, *то*

$$\frac{P_n(x)}{(x-a)^k g_{m-k}(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{r(x)}{g_{m-k}(x)};$$

2). Якщо $Q_m(x)=\left(x^2+px+q\right)^k\cdot g_{m-2k}(x)$, *то* $\dfrac{P_n(x)}{\left(x^2+px+q\right)^k\cdot g_{m-k}(x)}=$

$$=\frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q}+\frac{A_2x+B_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\ldots+\frac{A_kx+B_k}{\left(x^2+px+q\right)^k}+\frac{r(x)}{g_{m-2k}(x)},$$

де A_i, B_i, $i=\left(\overline{1,k}\right)$ *— деякі коефіцієнти,* $\dfrac{r(x)}{g_{m-k}(x)}$ *та* $\dfrac{r(x)}{g_{m-2k}(x)}$ *— правильні раціональні дроби.*

2. Інтегрування раціональних функцій.

1. Якщо підінтегральна функція — неправильний раціональний дріб, то за допомогою ділення його розкладають на суму многочлена та правильного раціонального дробу.

2. Знаменник правильного раціонального дробу розкладають на множники. За виглядом знаменника правильний раціональний дріб подають у вигляді суми найпростіших дробів, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів.

3. Інтегрують цілу частину та найпростіші дроби.

Рекомендована література:

1. Бубняк Т.І. Вища математика: Навчальний посібник. – Львів: “Новий світ–2000”,2004, с.141-148.

2. Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика для економістів. – К.: ЦУЛ,2002, с.279-283.

3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.:А.С.К., 2001, с.310-318, 330-342.

4. Пастушенко С.М., Підченко Ю.П. Вища математика. Довідник для студентів вищих навч.закладів: Навч. посібник. 2-е вид., виправлене і доповн. -К.: Діал.,2003, с.210-215.

Завдання для виконання:

Розв'язати приклади згідно свого варіанту (№ варіанту – порядковий номер по журналу):

Знайти неозначені інтеграли. Результати перевірити диференціюванням.

1. $\int \frac{x+1}{2x^2+3x-4}dx.\ \int \frac{x^3+4}{x^2-4x+3}dx$

2. $\int \frac{x+6}{3x^2+x+1}dx.\ \int \frac{x^3+5}{x^2-2x-3}dx$

3. $\int \frac{2x-1}{3x^2-2x+6}dx.\ \int \frac{x^3-4}{x^2-x-6}dx$

4. $\int \frac{x}{2x^2+x+5}dx.\ \int \frac{x^3-5}{x^2-6x+5}dx$

5. $\int \frac{x+5}{x^2+x-2}dx.\ \int \frac{x^3}{x^2-4}dx$

6. $\int \frac{3x-2}{5x^2-3x+2}dx.\ \int \frac{x^3+6}{x^2+5x-6}dx$

7. $\int \frac{x+4}{2x^2-6x-8}dx.\ \int \frac{x^3-2}{x^2-5x+6}dx$

8. $\int \frac{x+4}{2x^2-7x+1}dx.\ \int \frac{x^3+3}{x^2+x-6}dx$

9. $\int \frac{5x-2}{2x^2-5x+2}dx.\ \int \frac{x^3+2}{x^2-x-2}dx$

10. $\int \frac{4x-1}{4x^2-4x+5}dx.\ \int \frac{x^3+7}{x^2-5x+6}dx$

11. $\int \frac{x+1}{2x^2+x+1}dx.\ \int \frac{x^3+4}{x^2-4x+3}dx$

12. $\int \frac{x+1}{3x^2-2x-3}dx.\ \int \frac{x^3+5}{x^2-2x-3}dx$

13. $\int \frac{4x+8}{4x^2+6x-13}dx.\ \int \frac{x^3-4}{x^2-x-6}dx$

14. $\int \frac{5x+1}{x^2-4x+1}dx.\ \int \frac{x^3-5}{x^2-6x+5}dx$

15. $\int \frac{x}{2x^2+2x+5}dx.\ \int \frac{x^3}{x^2-4}dx$ 16. $\int \frac{x-3}{x^2-5x+4}dx.\ \int \frac{x^3+6}{x^2+5x-6}dx$

17. $\int \frac{2x-1}{2x^2+8x-6}dx.\ \int \frac{x^3-2}{x^2-5x+6}dx$ 18. $\int \frac{2-x}{4x^2+16x-12}dx.\ \int \frac{x^3+3}{x^2+x-6}dx$

19. $\int \frac{2x-1}{3x^2-6x-9}dx.\ \int \frac{x^3+2}{x^2-x-2}dx$ 20. $\int \frac{2x-1}{3+x-2x^2}dx.\ \int \frac{x^3+7}{x^2-5x+6}dx$

21. $\int \frac{x-4}{3x^2+x-1}dx.\ \int \frac{x^3+4}{x^2-4x+3}dx$ 22. $\int \frac{3x+1}{x^2-4x-2}dx.\ \int \frac{x^3+5}{x^2-2x-3}dx$

23. $\int \frac{x-5}{2x^2+x-4}dx.\ \int \frac{x^3-4}{x^2-x-6}dx$ 24. $\int \frac{2x+3}{3x^2+2x-7}dx.\ \int \frac{x^3-5}{x^2-6x+5}dx$

25. $\int \frac{x-3}{4x^2+2x-3}dx.\ \int \frac{x^3}{x^2-4}dx$ 26. $\int \frac{x+2}{3x^2-x+5}dx.\ \int \frac{x^3+6}{x^2+5x-6}dx$

27. $\int \frac{3x-2}{x^2+5x-1}dx.\ \int \frac{x^3-2}{x^2-5x+6}dx$ 28. $\int \frac{x-7}{4x^2+3x-1}dx.\ \int \frac{x^3+3}{x^2+x-6}dx$

29. $\int \frac{2x+1}{5x^2+2x+10}dx.\ \int \frac{x^3+2}{x^2-x-2}dx$ 30. $\int \frac{x-4}{5x^2-x+7}dx.\ \int \frac{x^3+7}{x^2-5x+6}dx$

3. Приклади розв’язування вправ:

Приклад 1. Даний правильний раціональний дріб (n<12) розкласти на суму найпростіших дробів.

$$\frac{P_n(x)}{(x+1)(x+2)^2x^3(x^2-x+2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+1}+\frac{B_1}{x+2}+\frac{B_2}{(x+2)^2}+$$

$$+\frac{C_1}{x}+\frac{C_2}{x^2}+\frac{C_3}{x^3}+\frac{Dx+E}{x^2-x+2}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+1}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+1)^2}.$$

Коефіцієнти A, B_1, B_2, ..., N_2 поки що невідомі (невизначені коефіцієнти); для їх знаходження треба праву частину рівності звести до спільного знаменника (найменшого) і знайдений чисельник прирівняти до чисельника даного дробу (бо здобуті дроби тотожно рівні й у них рівні знаменники). Із тотожної рівності многочленів у чисельниках одержимо рівності коефіцієнтів при однакових степенях змінної x, що являють собою систему лінійних рівнянь для знаходження коефіцієнтів A, B_1, B_2, ..., N_2. Описаний вище метод називають *методом невизначених коефіцієнтів*.

Приклад 2. $\int \frac{3x-1}{4x^2-4x+17}dx = \int \frac{3x-1}{4\left(x^2-x+\frac{17}{4}\right)}dx = \frac{1}{4}\int \frac{(3x-1)dx}{x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{17}{4}} =$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{(3x-1)dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+4} = \left| \begin{array}{l} x-\frac{1}{2}=t; dx=dt \\ x=t+\frac{1}{2}; \end{array} \right| = \frac{1}{4}\int \frac{3t+\frac{3}{2}-1}{t^2+4}dt = \frac{3}{4}\int \frac{tdt}{t^2+4} + \frac{1}{8}\int \frac{dt}{t^2+4} =$$

$$= \frac{3}{8}\ln\left(t^2+4\right) + \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \frac{3}{8}\ln\left(x^2-x+\frac{17}{4}\right) + \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{2} + C =$$
$$= \frac{3}{8}\ln\left(4x^2-4x+17\right) + \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{4} + C.$$

Приклад 3. $\int \frac{x^3+1}{x^2-3x+2}dx$

Так як під знаком інтеграла маємо неправильний дріб, то спочатку виділимо його цілу частину

$$\frac{x^3+1}{x^2-3x+2} = x+3+\frac{7x-5}{x^2-3x+2}$$

Розкладемо правильний дріб на елементарні дроби. Маємо

$$\frac{7x-5}{x^2-3x+2} = \frac{7x-5}{(x-2)(x-1)} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x-2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{Ax+Bx-A-2B}{(x-2)(x-1)}$$

Звідси маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} A+B=7 \\ -A-2B=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=7-B \\ -(7-B)-2B=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=7-B \\ -7-B=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=9 \\ B=-2 \end{cases}$$

Отже, підінтегральна функція має вигляд

$$\frac{x^3+1}{x^2-3x+2}=x+3+\frac{7x-5}{x^2-3x+2}=x+3+\frac{9}{x-2}-\frac{2}{x-1}$$

Використавши формулу інтегрування суми функцій та таблицю інтегралів отримаємо:

$$\int\frac{x^3+1}{x^2-3x+2}dx=\int\left(x+3+\frac{9}{x-2}-\frac{2}{x-1}\right)dx=\int xdx+\int 3dx+\int\frac{9}{x-2}dx-\int\frac{2}{x-1}dx=$$
$$=\frac{x^2}{2}+3x+9\ln(x-2)-2\ln(x-1)+C$$

Отриманий результат перевіримо диференціюванням

$$\left(\frac{x^2}{2}+3x-2\ln(x-1)+9\ln(x-2)+C\right)'=\frac{2x}{2}+3-\frac{2}{x-1}\cdot 1+\frac{9}{x-2}\cdot 1=x+3+\frac{-2}{x-1}+\frac{9}{x-2}=$$
$$=\frac{(x+3)(x^2-3x+2)-2(x-2)+9(x-1)}{x^2-3x+2}=\frac{(x^3-3x^2+2x+3x^2-9x+6)-2x+4+9x-9}{x^2-3x+2}=$$
$$=\frac{x^3-7x+6+7x-5}{x^2-3x+2}=\frac{x^3+1}{x^2-3x+2}$$

Приклад 4. Знайти інтеграл $\int\frac{6x^2-13x+4}{x^3-3x^2+2x}dx$.

Розклавши знаменник на множники, дістанемо:

$$x^3-3x^2+2x=x(x-1)(x-2).$$

Подамо даний дріб у вигляді суми найпростіших дробів:

$$\frac{6x^2-13x+4}{x^3-3x^2+2x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2}.$$

Далі маємо: $6x^2-13x+4=A(x-1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x-1)$ або

$$6x^2-13x+4=(A+B+C)x^2-(3A+2B+C)x+2A.$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях *x*, дістанемо систему рівнянь, з якої знаходимо A = 2, B=3, C=1.

$$\begin{cases} A+B+C=6; \\ 3A+2B+C=13; \\ 2A=4. \end{cases}$$

Таким чином,

$$\int \frac{6x^2-13x+4}{x^3-3x^2+2x}dx = 2\int \frac{dx}{x} + 3\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x-2} =$$

$$= 2\ln|x| + 3\ln|x-1| + \ln|x-2| + C = \ln\left|x^2(x-1)^3(x-2)\right| + C.$$

Питання для самоконтролю:

- Дайте означення невизначеного інтеграла.
- Які властивості невизначеного інтеграла ви знаєте?
- У чому полягають методи безпосереднього інтегрування, інтегрування частинами і заміни змінної?
- Який раціональний дріб називається правильним?
- Як розкласти правильний раціональний дріб на елементарні?
- Як інтегруються елементарні дроби?