Самостійна робота №17.

Тема: Інтегрування ірраціональних функцій. (2год.)

Методичні рекомендації:

Опрацювати рекомендовану літературу і зробити конспект за планом:

1. Інтегрування ірраціональних виразів.
2. Розв’язування вправ.

1. Інтегрування ірраціональних виразів

Інтеграли від ірраціональних функцій за допомогою підстановок, які залежать від типу підінтегральних виразів, зводяться до інтегралів від раціональних функцій.

Розглянемо основні типи ірраціональних підінтегральних виразів та підстановки, за якими вони раціоналізуються.

1. $$\int f\left(x, \sqrt[n]{x}\right)dx = \left| \begin{array}{l} x = t^n, \\ dx = nt^{n-1}dt. \end{array} \right| = n\int f\left(t^n, t\right) t^{n-1}dt.$$

2. $$\int \left(x, \sqrt[n]{(ax+b)^m} \right) dx = \left\| \begin{array}{l} f - \textit{раціональна} \\ \textit{функція від } x \\ \textit{і радикала} \end{array} \right\| = \left| \begin{array}{l} a+bx = t^n, \\ x = \dfrac{1}{b}\left(t^n - a\right), \\ dx = \dfrac{n}{b}t^{n-1}dt. \end{array} \right| =$$

$$= \frac{n}{b}\int f\left(\frac{1}{b}\left(t^n - a\right), t^m\right)t^{n-1}dt = \left\| \begin{array}{l} \textit{Підінтегральний вираз} - \textit{раціональна} \\ \textit{функція за властивістю 3 раціональ-} \\ \textit{них функцій.} \end{array} \right\|$$

3. $$\int f\left(x, \sqrt[n]{x}, \sqrt[m]{x}, \ldots, \sqrt[r]{x}\right)dx = \left| \begin{array}{l} x = t^s, \\ s - \textit{найменше спільне кратне чисел } n, m, \ldots, r, \\ dx = st^{s-1}dt. \end{array} \right| =$$
$$= \int f\left(t^s, t^{\frac{s}{n}}, t^{\frac{s}{m}}, \ldots, t^{\frac{s}{r}}\right)st^{s-1}dt.$$

4.

$$\int f\left(x, \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+l}\right)^m}\right)dx = \left\| \begin{array}{l} f - \textit{раціональна функція} \\ \textit{від } x \textit{ і радикала.} \end{array} \right\| = \left| \begin{array}{c} \frac{ax+b}{cx+l} = t^n, \\ ax+b = t^n(cx+l), \\ ax+b = cxt^n + lt^n, \\ x(a-ct^n) = lt^n - b, \\ x = \frac{lt^n - b}{a-ct^n}, \\ dx = \frac{lnt^{n-1}(a-ct^n) - (lt^n - b)(-cnt^{n-1})}{(a-ct^n)^2}dt = \\ = \frac{alnt^{n-1} - bcnt^{n-1}}{(a-ct^n)^2}dt = \frac{nt^{n-1}(al-bc)}{(a-ct^n)^2}dt. \end{array} \right| =$$

$$= \int f\left(\frac{lt^n - b}{a-ct^n}, t^m\right)\frac{nt^{n-1}(al-bc)}{(a-ct^n)^2}dt = \left\| \begin{array}{l} \textit{Підінтегральний вираз} - \\ \textit{раціональна функція} \\ \textit{за властивістю 3} \\ \textit{раціональних функцій.} \end{array} \right\|$$

5.1.

$$= \int f\left(\frac{2z\sqrt{a} - b}{c - z^2}, \frac{c\sqrt{a} - bz + z^2\sqrt{a}}{c - z^2}\right) \cdot 2\frac{c\sqrt{a} - bz + z^2\sqrt{a}}{(c - z^2)^2}dz = \left\| \begin{array}{l} \textit{Підінтегральний вираз} - \\ \textit{раціональна функція} \\ \textit{від змінної } z \textit{ за властивістю 3.} \end{array} \right\|$$

5.2. $$\int f\left(x, \sqrt{a + bx + cx^2}\right)dx = \left\| \begin{array}{l} f - \textit{раціональна функція} \\ \textit{від } x \textit{ і радикала, } a > 0, \end{array} \right\| =$$

$$
=\left|\begin{array}{l}
\textit{Заміна :}\\
\sqrt{a+bx+cx^2}=\sqrt{a}+xz\Rightarrow\\
\Rightarrow\left(a+bx+cx^2\right)=\left(\sqrt{a}+xz\right)^2\Rightarrow\\
\Rightarrow b+cx=2z\sqrt{a}+xz^2\Rightarrow\\
\Rightarrow dx=2\dfrac{c\sqrt{a}-bz+z^2\sqrt{a}}{\left(c-z^2\right)^2}dz.
\end{array}\right|=\int f\left(x,\sqrt{a+bx+cx^2}\right)dx=\left\|\begin{array}{l}
a<0,\\
f-\textit{раціональна функція}\\
\textit{від } x \textit{ і радикала.}
\end{array}\right\|=
$$

$$
\left|\begin{array}{l}
\sqrt{a+bx+cx^2}=x\sqrt{c}-z\Rightarrow\\
\Rightarrow\left(a+bx+cx^2\right)=\left(x\sqrt{c}-z\right)^2\Rightarrow\\
\Rightarrow a+bx=z^2-2xz\sqrt{c}\Rightarrow\\
\Rightarrow x=\dfrac{z^2-a}{2z\sqrt{c}+b}\Rightarrow\\
\Rightarrow dx=\dfrac{2z\left(2z\sqrt{c}+b\right)-2\sqrt{c}\left(z^2-a\right)}{\left(2z\sqrt{c}+b\right)^2}dz\\
=\dfrac{4z^2\sqrt{c}+2xb-2\sqrt{c}z^2+2a\sqrt{c}}{\left(2z\sqrt{c}+b\right)^2}dz\\
=\dfrac{2\sqrt{c}z^2+2zb+2a\sqrt{c}}{\left(2z\sqrt{c}+b\right)^2}dz.
\end{array}\right|==\int f\left(\frac{z^2-a}{2z\sqrt{c}+b},\frac{z^2-a}{2z\sqrt{c}+b}\sqrt{c}-z\right)\times
$$

$$
\times\frac{2\sqrt{c}z^2+2zb+2a\sqrt{c}}{\left(2z\sqrt{c}+b\right)^2}dz=\left\|\begin{array}{l}
\textit{Підінтегральний вираз} -\\
\textit{раціональна функція}\\
\textit{від змінної } z \textit{ за властивістю 3.}
\end{array}\right\|
$$

6.

$$
\int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}=\left|\begin{array}{l}
Ax+B=z,\\
Adx=dz,\\
Ax^2+2Bx+C=\dfrac{1}{A}\left(z^2+AC-B^2\right)
\end{array}\right|=\left[\begin{array}{l}
\dfrac{1}{\sqrt{A}}\ln\left|z+\sqrt{z^2+AC-B^2}\right|+C,\ A>0,\\
\dfrac{1}{\sqrt{-A}}\arcsin\dfrac{Az+B}{\sqrt{B^2-AC}}+C,\ A<0.
\end{array}\right.
$$

7.

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = \left| \begin{array}{l} \textit{Підстановкою} \quad x-a=\dfrac{1}{z} \\ \textit{зводимо даний інтеграл до інтеграла виду 6;} \\ x=a+\dfrac{1}{z}, \\ dx=-\dfrac{1}{z^2}dz, \\ Ax^2+2Bx+C=A\left(a+\dfrac{1}{z}\right)^2+2B\left(a+\dfrac{1}{z}\right)+C= \\ =\dfrac{A(az+1)^2+2Bz(az+1)+Cz^2}{z^2}= \\ =\dfrac{\left(Aa^2+2Ba+C\right)z^2+(2B+2Aa)z+A}{z^2}. \end{array} \right| =$$

$$=\int -\frac{1}{z^2}\frac{z\cdot z}{\sqrt{\left(Aa^2+2Ba+C\right)z^2+(2B+2Aa)z+A}}dz=\int \frac{dz}{\sqrt{A_1z^2+B_1z+C_1}}, \text{ де}$$

$$A_1=Aa^2+2Ba+C,\ \ B_1=2B+2Aa,\ \ C_1=A.$$

8.

$$\int \frac{f(x)}{F(x)\sqrt{Ax^2+Bx+C}}dx = \left\| \frac{f(x)}{F(x)} - \textit{раціональна функція} \right\| = \left\| \begin{array}{l} \textit{Вираз } \dfrac{f(x)}{F(x)} \textit{ потрібно розкласти на} \\ \textit{суму найпростіших дробів за відомими} \\ \textit{правилами і звести інтеграл до} \\ \textit{інтегралів попередніх видів.} \end{array} \right\|$$

9. Підстановки Ейлера, за допомогою яких завжди раціоналізується вираз виду $f\left(x, \sqrt{Ax^2+Bx+C}\right)$, де f – раціональна функція.

Перша підстановка $(a>0)$:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\left[\begin{array}{l} t-\sqrt{a}x \\ t+\sqrt{a}x \end{array}\right.$$

Друга підстановка $(c>0)$:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\left[\begin{array}{l} xt+\sqrt{c} \\ xt-\sqrt{c} \end{array}\right.$$

Третя підстановка $\left(ax^2+bx+c=a(x-\lambda)(x-\mu)\right)$**:**

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\lambda) \text{ або } t=\sqrt{a\frac{(x-\mu)}{(x-\lambda)}}.$$

10. Виокремити алгебраїчну частину з інтеграла $\int\frac{P(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, де $P(x)$ — многочлен n-го степеня, можна за формулою $\int\frac{P(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$,

де $Q(x)$ — многочлен n-го степеня, $\lambda=const$. Коефіцієнти цього многочлена знайдемо за методом невизначених коефіцієнтів. Продиференціювавши формулу і помноживши здобуту рівність на $\sqrt{ax^2+bx+c}$, дістанемо: $P(x)=Q'(x)\left(ax^2+bx+c\right)+\frac{1}{2}Q(x)(2ax+b)+\lambda$.

Звідси методом невизначених коефіцієнтів знайдемо $Q(x)$.

Рекомендована література:

1. Бубняк Т.І. Вища математика: Навчальний посібник. – Львів: “Новий світ–2000”,2004, с.150-151.
2. Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика для економістів. – К.: ЦУЛ,2002, с.283-284.
3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.:А.С.К., 2001, с.310-318, 355-361.
4. Пастушенко С.М., Підченко Ю.П. Вища математика. Довідник для студентів вищих навч.закладів: Навч. посібник. 2-е вид., виправлене і доповн. -К.: Діал.,2003, с.220-222.

Завдання для виконання:

Розв’язати приклади згідно свого варіанту (№ варіанту – порядковий номер по журналу):

Знайти неозначені інтеграли. Результати перевірити диференціюванням.

1. $\int \frac{2x-13}{\sqrt{3x^2-3x-16}}dx.$

2. $\int \frac{x-3}{\sqrt{2x^2-4x-1}}dx.$

3. $\int \frac{x-1}{\sqrt{3x^2-x+5}}dx.$

4. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{1+x-3x^2}}dx.$

5. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{4x^2+8x+9}}dx.$

6. $\int \frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}}dx.$

7. $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x+x^2}}dx.$

8. $\int \frac{3x+4}{\sqrt{x^2+6x+13}}dx.$

9. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{2x^2-5x+1}}dx.$

10. $\int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2+3x-4}}dx.$

11. $\int \frac{x-4}{\sqrt{2x^2-x+7}}dx.$

12. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-3x+4}}dx.$

13. $\int \frac{4x+1}{\sqrt{2+x-x^2}}dx.$

14. $\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+4x-5}}dx.$

15. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{4+2x-x^2}}dx.$

16. $\int \frac{x-7}{\sqrt{3x^2-2x+1}}dx.$

17. $\int \frac{x+5}{\sqrt{3-6x-x^2}}dx.$

18. $\int \frac{2x+4}{\sqrt{3x^2+x-5}}dx.$

19. $\int \frac{7x-2}{\sqrt{x^2-5x+1}}dx.$

20. $\int \frac{x-8}{\sqrt{4x^2+x-5}}dx.$

21. $\int \frac{3x+4}{\sqrt{2+3x-x^2}}dx.$

22. $\int \frac{x-6}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx.$

23. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{2x^2-x+6}}dx.$

24. $\int \frac{x-9}{\sqrt{4+2x-x^2}}dx.$

25. $\int \frac{2x+7}{\sqrt{x^2+5x-4}}dx.$

26. $\int \frac{3x-4}{\sqrt{2x^2-6x+1}}dx.$

27. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{3x^2+9x-4}}dx.$

28. $\int \frac{4x+3}{\sqrt{2x^2-x+5}}dx.$

29. $\int \frac{3x-7}{\sqrt{x^2-5x+1}}dx.$

30. $\int \frac{7x-1}{\sqrt{2-3x-x^2}}dx.$

2. Приклади розв'язування вправ:

Приклад 1. Обчислити інтеграл

$$\int x\sqrt{a-x}dx = \left| \begin{array}{l} a-x=t^2, \\ x=a-t^2, \\ dx=-2tdt. \end{array} \right| = -\int \left(a-t^2\right) t2tdt = -2\int t^2\left(a-t^2\right)dt = -2\int \left(at^2-t^4\right)dt =$$

$$= -2a\frac{t^3}{3} + 2\frac{t^5}{5} + C = -2a\frac{\sqrt{(a-x)^3}}{3} + \frac{2}{5}\left(\sqrt{(a-x)^5}\right) + C.$$

Приклад 2.

$$\int x\sqrt[3]{(2x+3)^4}\,dx = \left| \begin{array}{l} 2x+3=t^3 \\ x=\dfrac{t^3-3}{2} \\ dx=\dfrac{3}{2}t^2dt \end{array} \right| = \frac{3}{4}\int \left(t^3-3\right)\cdot t^4\cdot t^2dt = \frac{3}{4}\int \left(t^9-3t^6\right)dt =$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{t^{10}}{10} - \frac{9}{4}\cdot\frac{t^7}{7} + C = \frac{3}{40}\sqrt[3]{(2x+3)^{10}} - \frac{9}{28}\sqrt[3]{(2x+3)^7} + C.$$

$$= \frac{3}{8}\ln\left(4x^2-4x+17\right) + \frac{1}{16}\text{arctg}\frac{2x-1}{4} + C.$$

Приклад 3.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt[6]{x}=t, \\ x=t^6, \\ dx=6t^5dt. \end{array} \right| = 6\int \frac{t^2dt}{t+1} = 3t^2-6t+6\ln|t+1|+C = 3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C.$$

Приклад 4. $$\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx = \left| \begin{array}{l} \frac{x+1}{x-1}=t^2 \Rightarrow x+1=t^2(x-1), \\ x=\frac{t^2+1}{t^2-1}, \\ dx=\frac{2t(t^2-1)-2t(t^2+1)}{(t^2-1)^2}dt=\frac{-4t\,dt}{(t^2-1)^2}. \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{(t^2-1)^2 t(-4tdt)}{(t^2+1)^2(t^2-1)^2} = -2\int \frac{2t^2dt}{(t^2+1)^2} = \left| \begin{array}{l} t=u,\ dt=du \\ -\frac{2tdt}{(t^2+1)^2}=dv \\ v=(t^2+1)^{-1}. \end{array} \right| =$$

$$= \frac{2t}{t^2+1}-2\int\frac{dt}{t^2+1} = \frac{2t}{t^2+1}-2arctgt+C = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-2arctg\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+C.$$

Приклад 5.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x^2+a}=z-x, \\ a=-2xz+z^2, \\ x=\frac{z^2-a}{2z}, \\ \sqrt{x^2+a}=\frac{z^2+a}{2z}, \\ dx=\frac{z^2+a}{2z^2}dz. \end{array} \right| = \int \frac{z^2+a}{2z^2}\frac{2z}{z^2+a}dz = \int\frac{dz}{z} = \ln z + C = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)+C.$$

Приклад 6.

1) $$\int \frac{xdx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \frac{\sqrt{a+2bx+cz^2}}{c}-\frac{b}{c}\int\frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}};$$

2) $$\int \sqrt{a+2bx+cx^2}dx = \left(\frac{x}{2}+\frac{b}{2c}\right)\sqrt{a+2bx+cx^2}+\left(\frac{a}{2}+\frac{b^2}{2c}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}};$$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{b}}\ln\left(bx \pm \sqrt{b}\sqrt{a+bx^2}\right) + C$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{b}}\arcsin x\sqrt{\frac{b}{a}} + C$;

5) $\int \sqrt{2ax+x^2}\,dx = \frac{a+x}{2}\sqrt{2ax+x^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|a+x+\sqrt{2ax+x^2}\right| + C$;

6) $\int \sqrt{2ax+x^2}\,dx = \frac{x-a}{2}\sqrt{2ax+x^2} - \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{a-x}{a} + C$;

7) $\int \frac{xdx}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{b}\sqrt{a+bx^2} + C$;

8) $\int \frac{x^2}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{x}{2b}\sqrt{a+bx^2} - \frac{a}{2b\sqrt{b}}\ln\left|bx+\sqrt{b}\sqrt{a+bx^2}\right| + C$;

9) $\int \frac{dx}{(x-a)^n\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \left|x-a=\frac{1}{y}\right| = \int \frac{y^{n-t}dy}{\sqrt{c+2(b+ca)y+\left(a+2ba+ca^2\right)y^2}}$.

Приклад 7.

1) $\int \frac{dx}{\left(x^2-4\right)\sqrt{Ax^2+Bx+C}} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{Ax^2+Bx+C}} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{Ax^2+Bx+C}}$;

2) $\int \frac{(x+2)dx}{\left(x^2-3\right)\sqrt{ax^2+bx+C}} = 5\int \frac{dx}{(x-3)^2\sqrt{ax^2+bx+C}} + \int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{ax^2+bx+C}}$.

Приклад 8.

1) $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left|x^2=y\right| = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{a^2-y}} = -\sqrt{a^2-x^2} + C$;

2) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{a^3-cx^4}} = -\frac{1}{2c}\sqrt{a-cx^4} + C$;

3) $\int \sqrt{\frac{xdx}{a^3-x^3}}dx = \left|x^3=y^2\right| = \frac{2}{3}\int \frac{dy}{\sqrt{a^3-y^2}} = -\frac{2}{3}\arccos\sqrt{\frac{x^3}{a^3}} + C$;

4) $\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}=\left\|\begin{array}{l}\textit{Домножуємо на } \sqrt{a+x}\\ \textit{чисельник та знаменник дробу.}\end{array}\right\|=a\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}+\int\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}=$

$=\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C;$

Приклад 9.

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\left\|\begin{array}{l}\textit{Застосовуємо першу}\\ \textit{підстановку Ейлера}\end{array}\right\|=\left|\begin{array}{l}\sqrt{x^2-x+1}=t-x,\\ x=\frac{t^2-1}{2t-1},\ dx=2\frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}dt,\\ t=\sqrt{x^2-x+1}+x.\end{array}\right|=\int\frac{2t^2-2t+2}{t(2t-1)^2}dt=$$

$$=\int\left(\frac{2}{t}-\frac{3}{2t-1}+\frac{3}{(2t-1)^2}\right)dt=-\frac{3}{2}\frac{1}{2t-1}+2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln(2t-1)+C=-\frac{3}{2}\frac{1}{2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1}-$$

$$-\frac{3}{2}\ln\left|2x+2\sqrt{x^2-x+1}\right|+2\ln\left|x+\sqrt{x^2-x+1}\right|+C.$$

Приклад 10.

$$\int\frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx=\left\|\deg P(x)=3,\ \deg Q(x)=2\ .\right\|=\left(ax^2+bx+c\right)\sqrt{x^2+2x+2}+$$

$$+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}=\left|\begin{array}{l}\textit{За формулою маємо } x^3-x+1=(2a_1x+b_1)(x^2+2x+2)+\\ +(a_1x^2+b_1x+c_1)(x+1)+\lambda\end{array}\right|=$$

$$=\left|\textit{Із системи рівнянь}\begin{cases}3a_1=1\\ 5a_1+2b_1=0\\ 4a_1+3b_1+c=-1\\ 2b_1+c_1+\lambda=1\end{cases}\Rightarrow\textit{знаходимо значення}\begin{cases}a_1=\frac{1}{3}\\ b_1=-\frac{5}{6}\\ c_1=\frac{1}{6}\\ \lambda=\frac{5}{2}\end{cases}\right|=$$

$$=\frac{1}{6}\left(2x^2-5x+1\right)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{5}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C.$$

Питання для самоконтролю:

- Дайте означення невизначеного інтеграла.
- Які властивості невизначеного інтеграла ви знаєте?
- Які ви знаєте методи інтегрування?
- Який вираз називається ірраціональним?
- Як знаходяться інтеграли від ірраціональних виразів?
- Що таке підстановки Ейлера?