Самостійна робота №18.

Тема: Інтегрування тригонометричних функцій. (2год.)

Методичні рекомендації:

Опрацювати рекомендовану літературу і зробити конспект за планом:

1. Інтегрування тригонометричних виразів.
2. Розв’язування вправ.

1. Інтегрування тригонометричних виразів

Розглянемо деякі підстановки, що раціоналізують інтеграл від тригонометричного виразу

$$\int R(\sin x, \cos x)dx,$$

де $R(\sin x, \cos x)$ — раціональна функція від $\sin x, \cos x$.

I. ***Універсальна підстановка*** $\boxed{tg\,\frac{x}{2}=t.}$

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \left| \begin{array}{l} tg\,\frac{x}{2}=t, \\ x = 2arctgt, \\ dx = \frac{2}{1+t^2}dt, \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \end{array} \right| = \int R\left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= \int R^*(t)dt = \left\| R^*(t) \text{— раціональна функція від } t. \right\|$$

В окремих випадках можна користуватися простішими підстановками.

II. ***Якщо інтеграл зводиться до виду*** $\int R(tgx)dx$, ***то застосовуємо заміну*** $tgx = t$:

$$\int R(tgx)dx = \left| \begin{array}{c} tgx = t, \\ x = arctgt, \\ dx = \dfrac{dt}{t^2+1}. \end{array} \right| = \int R(t)\frac{dt}{1+t^2} = \int R^*(t)dt = \left\| \begin{array}{l} R \text{— раціональна} \\ \text{функція від } t. \end{array} \right\|$$

Із цим випадком стикаємося щоразу, коли підінтегральний вираз містить парні степені $\sin x$ і $\cos x$, оскільки

$$\sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x}, \ \cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x}.$$

III. ***Якщо інтеграл зводиться до виду*** $\int R(\sin x, \cos^2 x)\cos xdx$, ***то виконуємо заміну*** $\sin x = t$:

$$\int R(\sin x, \cos^2 x)\cos xdx = \left| \begin{array}{l} \sin x = z, \\ d\sin x = dz, \\ \cos xdx = dz, \\ \cos^2 x = 1-\sin^2 x. \end{array} \right| = \int R(t, 1-z^2)dz = \left\| \begin{array}{l} R \text{— раціональна} \\ \text{функція від } t. \end{array} \right\|$$

IV. ***Якщо інтеграл зводиться до виду*** $\int R(\sin^2 x, \cos x)\sin xdx$, ***то виконуємо підстановку*** $\cos x = z$:

$$\int R(\sin^2 x, \cos x)\sin xdx = \left| \begin{array}{l} \cos x = z, \\ d\cos x = dz, \\ -\sin xdx = dt. \end{array} \right| = -\int R(1-z^2, z)dz.$$

V. ***Якщо інтеграл зводиться до виду***

$$\int \sin^m x \cos^n xdx,$$

де m, n ***— цілі числа, то підінтегральний диференціал є раціональна функція від*** $\sin x$ ***і*** $\cos x$***, яку можна зінтегрувати відомими методами.***

а)

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = z, \\ d \sin x = dz, \\ \cos x dx = dz, \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x. \end{array} \right| = \int z^m \left(1 - z^2\right)^{\frac{n-1}{2}} dz = \left| \begin{array}{l} \textit{Маємо біноміальний диференціал,} \\ \textit{який інтегрується, коли одне з чисел} \\ \dfrac{n-1}{2}, \dfrac{m+1}{2}, \dfrac{m+n}{2} \text{ — \textit{ціле.}} \end{array} \right|$$

б)

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int \sin^m x \cos^{n-1} x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \textit{За формулою} \\ u = \cos^{n-1} x, \\ dv = \sin^m x \cos x dx, \\ du = -(n-1)\cos^{n-2} x (\sin x) dx, \\ v = \dfrac{\sin^{m+1} x}{m+1}. \end{array} \right| = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} +$$

$$+ \frac{n-1}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^m x \left(1 - \cos^2 x\right) \cos^{n-2} x dx =$$

$$= \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1}}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^m x \cos^{n-2} x dx - \frac{n-1}{m+1} \int \sin^m x \cos^n x dx.$$

Розв’язуючи здобуте рівняння відносно даного інтеграла, дістаємо:

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x dx.$$

VI. ***Деякі підінтегральні вирази, що зводяться до раціонального вигляду підстановками 1–4, можуть бути безпосередньо знайдені за допомогою штучних прийомів.***

а)

$$\int\frac{dx}{a\cos x+b\sin x}=\left|\begin{array}{l}\textit{Визначимо числа}\\ r \text{ і } \alpha \text{ так, щоб}\\ a=r\cos\alpha,\ b=r\sin\alpha,\\ \textit{тоді}\\ a\cos x+b\sin x=r\cos(x-\alpha).\end{array}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{d(x-\alpha)}{\cos(x-\alpha)}=\frac{1}{2}\ln tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x-\alpha}{2}\right)+C.$$

б)

$$\int\frac{dx}{a\cos^2 x+b\sin^2 x}=\int\frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{a+b\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\int\frac{d\,\mathrm{tg}\,x}{a+b\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\int\frac{dtgx}{a+btg^2 x}=\left|tgx=t\right|=\int\frac{dt}{a+bt^2}.$$

в)

$$\int\frac{dx}{a+b\cos x}=\int\frac{dx}{a\left[\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right]+b\left[\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right]}=2\int\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{(a+1)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+(a-b)\sin^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\textit{Дістаємо}\\ \textit{інтеграл б)}\end{array}\right|.$$

г)

$$\int\frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x}=\left|\begin{array}{l}b=r\cos\alpha,\\ c=r\sin\alpha,\\ b\cos x+c\sin x=\\ =r\cos(x-\alpha).\end{array}\right|=\int\frac{d(x-\alpha)}{a+r\cos(x-\alpha)}=\left|\begin{array}{l}\textit{Дістаємо}\\ \textit{інтеграл в).}\end{array}\right|.$$

Рекомендована література:

1. Бубняк Т.І. Вища математика: Навчальний посібник. – Львів: “Новий світ–2000”,2004, с.148-150.

2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.:А.С.К., 2001, с.310-318, 355-361.

3. Пастушенко С.М., Підченко Ю.П. Вища математика. Довідник для студентів вищих навч.закладів: Навч. посібник. 2-е вид., виправлене і доповн. -К.: Діал.,2003, с.215-220.

Завдання для виконання:

Розв'язати приклади згідно свого варіанту (№ варіанту – порядковий номер по журналу):

Знайти неозначені інтеграли. Результати перевірити диференціюванням.

1. $\int \frac{dx}{5+2\sin x+3\cos x}.$

2. $\int \frac{3\sin x-2\cos x}{1+\cos x}dx.$

3. $\int \frac{dx}{5\cos x+10\sin x}.$

4. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}.$

5. $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x+3}.$

6. $\int \frac{2-\sin x+3\cos x}{1+\cos x}dx.$

7. $\int \frac{dx}{8\sin^2 x-16\sin x\cos x}.$

8. $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}.$

9. $\int \frac{2tgx+3}{\sin^2 x+2\cos^2 x}dx.$

10. $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx.$

11. $\int \frac{dx}{\cos x\sin^3 x}.$

12. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x-2}.$

13. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+3\sin x\cos x-\cos^2 x}.$

14. $\int \cos^4 3x\sin^2 3xdx.$

15. $\int \sqrt[5]{\sin^4 x}\cos^3 xdx.$

16. $\int \cos^3 x\sin^8 xdx.$

17. $\int \cos^4 x\sin^3 xdx.$

18. $\int \sin^3 x\cos^8 xdx.$

19. $\int \frac{3\sin^3 x dx}{\cos^4 x}$.

20. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin^4 x}}$.

21. $\int \sin^3 6x dx$.

22. $\int \sin^4 2x dx$.

23. $\int \cos^3 4x dx$.

24. $\int \mathrm{tg}^4 3x dx$.

25. $\int \mathrm{tg}^3 x dx$.

26. $\int x\mathrm{tg}^2 x^2 dx$.

27. $\int \sin 3x \cos x dx$.

28. $\int \cos 2x \cos 3x dx$.

29. $\int \sin 5x \sin 7x dx$.

30. $\int \sin^2 2x \cos x dx$.

2. Приклади розв’язування вправ:

Приклад. Обчислити інтеграл

$$\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x - 1} = \left| \begin{array}{l} tg\frac{x}{2} = t, \\ x = 2arctgt, \\ dx = \frac{2}{1+t^2}dt, \\ \sin x = \frac{2t}{t^2+1}, \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2}{t^2+1}dt}{\frac{4t+t^2-2}{t^2+1}} = 2\int \frac{dt}{4t+t^2-2} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{(t+2)^2 - 6} = \left| \begin{array}{l} t+2 = z, \\ t = 2 - z, \\ dt = dz. \end{array} \right| = 2\int \frac{dz}{z^2 - 6} = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \frac{z-\sqrt{6}}{z+\sqrt{6}} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \frac{t+2-\sqrt{6}}{t+2+\sqrt{6}} + C = \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2} + 2 - \sqrt{6}}{\mathrm{tg}\frac{x}{2} + 2 + \sqrt{6}} + C.$$

Питання для самоконтролю:

- Дайте означення невизначеного інтеграла.
- Які властивості невизначеного інтеграла ви знаєте?
- Які ви знаєте методи інтегрування?
- Які вирази називаються тригонометричними?
- Яка підстановка є універсальною при знаходженні інтегралів від тригонометричних функцій?
- Які ще підстановки використовуються при знаходженні інтегралів , що містять тригонометричні вирази?