Самостійна робота №19.

Тема: Обчислення визначених інтегралів. (2год.)

Методичні рекомендації:

Опрацювати рекомендовану літературу за планом:

1. Визначений інтеграл, його геометричний зміст і властивості.
2. Основні методи обчислення визначеного інтеграла: формула Ньютона-Лейбніца, метод підстановки, метод інтегрування за частинами.
3. Наближені методи обчислення визначених інтегралів.

1. Визначений інтеграл, його геометричний зміст і властивості.

Нехай на відрізку $[a;\ b]$ визначена функція $f(x)$. Розіб'ємо $[a;\ b]$ на n відрізків $[x_{i-1},\ x_i]$, де $i=1,\ 2,\ \dots,\ n$ і $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Величина λ дорівнює максимальній з довжин відрізків $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Всередині кожного з відрізків вибираємо довільну точку ξ_i. Величину $s_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ називають *інтегральною сумою.*

Означення. Якщо існує границя інтегральної суми для $\lambda \to 0,\ n \to \infty$, яка не залежить від способу розбиття відрізка $[a;\ b]$ і вибору точок ξ_i, то ця границя називається ***визначеним інтегралом*** від функції $f(x)$ на відрізку $[a;\ b]$ і позначається символом

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ n\to\infty}} s_n = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \quad . \qquad (1)$$

<u>**Теорема**. *(Про існування визначеного інтегралу.)*</u> Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a;\ b]$, то $\lim\limits_{\substack{\lambda\to 0\\ n\to\infty}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ існує і не залежить від способу розбиття відрізка $[a;\ b]$ на часткові відрізки і від вибору точок ξ_i. В такому випадку функцію $f(x)$ називають інтегрованою на відрізку $[a; b]$. Числа a і b називають відповідно нижньою і верхньою межами інтегрування.

Геометричний зміст визначеного інтеграла.

Якщо $f(x) > 0$, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = f(x)$, $x = a,\ x = b,\ y = 0$.

Властивості визначеного інтеграла.

1. При переставлені меж визначеного інтеграла змінюється його знак на протилежний

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \qquad (2)$$

2. Для будь-якої функції $y = f(x)$, $\int_a^a f(x)dx = 0$. (3)

3. Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла.

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \qquad (4)$$

4. Визначений інтеграл алгебраїчної суми скінченого числа функцій дорівнює сумі визначених інтегралів цих функцій.

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \ldots + \int_a^b f_n(x)dx \qquad (5)$$

5. Відрізок інтегрування можна розбити на частини

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \qquad (6)$$

2. Основні методи обчислення визначеного інтеграла: формула Ньютона-Лейбніца, метод підстановки, метод інтегрування за частинами.

Формула Ньютона-Лейбніца. Для обчислення визначеного інтеграла від функції в тому випадку, коли можна знайти відповідний невизначений інтеграл, є формула Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Заміна змінної у визначеному інтегралі (метод підстановки).

Теорема. Нехай функція $f(x)$ неперервна в будь-якій точці $x = \varphi(t), \quad де \ t \in [\alpha, \beta]$, і нехай $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$. Тоді якщо функція $\varphi(t)$ має неперервну похідну, то справедлива така формула:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Метод інтегрування за частинами.

Якщо функції u(x) і v(x) неперервні на [a,b] разом із своїми першими похідними має місце формула інтегрування частинами:

$$\int_a^b udv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

3.Наближені методи обчислення визначених інтегралів.

Визначений інтеграл від заданої неперервної функції далеко не завжди можна легко та точно обчислити. Однак, використовуючи геометричний зміст, можна побудувати ряд наближених формул, за допомогою яких інтеграл обчислюється з будь-якою точністю. Розглянемо такі формули.

Нехай від заданої та неперервної на $[a;\, b]$ функції $y=f(x)$ треба обчислити визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx.$

Поділимо відрізок $[a;\, b]$ точками $a=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n=b$ на n рівних частин завдовжки $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$.

Значення функції $f(x)$ у точках $x_i,\ i=(0,\overline{n})$ позначимо так: $y_0=f(x_0)$, $y_1=f(x_1),\ y_2=f(x_2),\ldots,y_n=f(x_n).$ Побудуємо для функції $f(x)$ на проміжку $[a;b]$ інтегральні суми, кожна з яких буде наближено подавати визначений інтеграл:

$$\int\limits_a^b f(x)dx\approx\sum_{i=0}^{n-1}y_i\Delta x=\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}y_i, \qquad (7)$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx\approx\sum_{i=1}^{n}y_i\Delta x=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i. \qquad (8)$$

Формули (7) та (8) називаються ***формулами лівого та правого прямокутників відповідно***. Ця назва пов’язана з тим, що криволінійна трапеція наближено замінюється відповідною ступінчастою фігурою (рис.1).

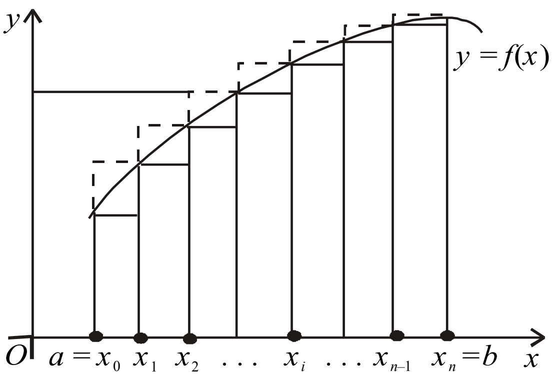

Рис. 1.

II. ***Формула трапецій***.

Більш точне значення визначеного інтеграла буде, якщо криву $y = f(x)$ замінювати не ступінчастою лінією, а вписаною ламаною, тобто криволінійна трапеція замінюється сумою n прямолінійних трапецій (рис. 2).

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{2}\left(y_0 + y_n\right) + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right) \tag{9}$$

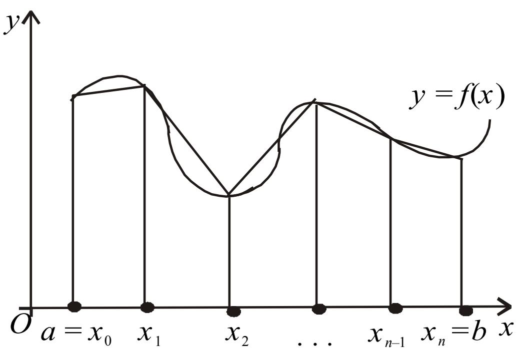

Рис. 2.

III. ***Формула Сімпсона***.

Поділимо $[a; b]$ на парне число рівних частин $n = 2m$ точками x_i $i = \left(\overline{0,2m}\right)$ так, що $a=x_0$, $b=x_{2m}$. На кожному із цих проміжків криволінійну сторону трапеції, рівнянням якої є $y = f(x)$, замінюємо певною параболою. Таке наближення для обчислення визначеного інтеграла буде точнішим, ніж за попередніми формулами (рис. 3).

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6m}\left(y_0 + y_{2m} + 2\left(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2}\right) + \left(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1}\right)\right). \qquad (10)$$

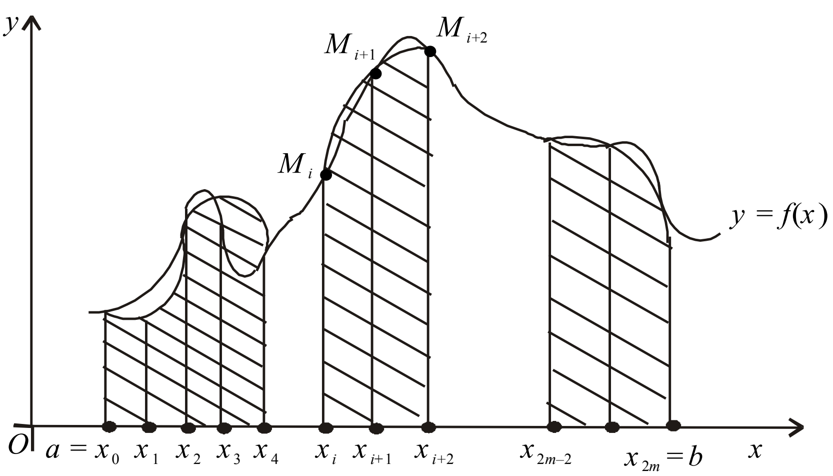

Рис. 3.

Рекомендована література:

1. Бубняк Т.І. Вища математика: Навчальний посібник. – Львів: “Новий світ–2000”,2004, с.162-170.

2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.:А.С.К., 2001, с.365-400.

3. Пастушенко С.М., Підченко Ю.П. Вища математика. Довідник для студентів вищих навч.закладів: Навч. посібник. 2-е вид., виправлене і доповн. -К.: Діал.,2003, с.230-250.

Завдання для виконання:

Завдання 1. *Розв'язати приклади згідно свого варіанту (№ варіанту – остання цифра порядкового номеру по журналу):*

Знайти визначені інтеграли.

1. а) $\int\limits_{2}^{7} \frac{\sqrt{x+2}}{x}dx$. б) $\int\limits_{-\frac{3}{4}}^{0} \frac{3x}{\sqrt{(x+1)^3}}dx$.

2. а) $\int\limits_{-8}^{0} \frac{dx}{5-\sqrt[3]{x^2}}$. б) $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt{x}-3}$.

3. а) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{4+\sqrt[3]{x^2}}$. б) $\int\limits_{0}^{4} \frac{\sqrt{x}}{4+x}dx$.

4. а) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{8+\sqrt[3]{x^2}}$. б) $\int\limits_{-\frac{1}{4}}^{0} \frac{dx}{1+\sqrt{3x+1}}$.

5. а) $\int\limits_{3}^{6} \frac{\sqrt{x-3}}{x}dx$. б) $\int\limits_{0}^{3} \frac{x^2+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}dx$.

6. а) $\int_{25}^{49} \frac{\sqrt{x}}{x-6} dx$. б) $\int_{2}^{1} \frac{\sqrt{x-2}}{1+\sqrt{x-2}} dx$.

7. а) $\int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{2x+7}} dx$. б) $\int_{4}^{9} \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}$.

8. а) $\int_{-8}^{0} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}+3} dx$. б) $\int_{2}^{1} \frac{\sqrt{x-2}}{1+\sqrt{x-2}} dx$.

9. а) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{2+\sqrt[4]{x-1}}$. б) $\int_{1}^{2} x\sqrt{2-x}\, dx$.

10. а) $\int_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt{x}+5}$. б) $\int_{0}^{1} \frac{x^5\, dx}{\sqrt{1-x^6}}$.

Завдання 2. *Обчислити наближено при n=10 за формулами прямокутників, трапецій, Сімпсона такий інтеграл:* $I = \int_{1}^{5} \frac{dx}{x}$.

Приклади розв'язування вправ:

Приклад 1. Знайти визначені інтеграли.

1) $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{2\sin x}{(1-\cos x)^2} dx$

За формулою заміни змінної маємо:

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{2\sin x}{(1-\cos x)^2} dx = \left| \begin{matrix} u = 1-\cos x & u_1 = 1-\cos\frac{\pi}{2} = 1 \\ du = \sin x dx & u_2 = 1-\cos\pi = 2 \end{matrix} \right| = 2\int_{1}^{2} \frac{du}{u^2} = -2u^{-1}\Big|_1^2 = -1+2 = 1$$

2) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx; \\ \cos 2x dx = dv, \\ v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right| = \left(\frac{x}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\sin\pi + \frac{1}{2}\cos\pi\right) - \left(0\cdot\sin 0 + \frac{1}{2}\cos 0\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Приклад 2. Обчислити наближено при n=10 за формулами прямокутників, трапецій, Сімпсона такий інтеграл: $I = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$.

Поділимо проміжок [1; 2] на 10 рівних частин, тобто візьмемо $\Delta x = \frac{2-1}{10} = 0{,}1$ та складемо таку таблицю значень функції $y = \frac{1}{x}$:

x_i	y_i	x_i	y_i
x_0 = 1,0 x_1 = 1,1 x_2 = 1,2 x_3 = 1,3	y_0 = 1,00000 y_1 = 0,90909 y_2 = 0,83333 y_3 = 0,76923	x_6 = 1,6 x_7 = 1,7 x_8 = 1,8 x_9 = 1,9	y_6 = 0,62500 y_7 = 0,58824 y_8 = 0,55556 y_9 = 0,52632
x_4 = 1,4 x_5= 1,5	y_4 = 0,71429 y_5 = 0,66667	x_{10} = 2,0	y_{10} = 0,50000

За формулою лівих прямокутників (n=10)

$$I \approx \frac{b-a}{10}\left(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_9\right) = 0{,}1 \cdot 7{,}18773 \approx 0{,}71877.$$

За формулою правих прямокутників (n=10)

$$I = \frac{b-a}{10}\left(y_1 + y_2 + \ldots + y_{10}\right) = 0{,}1 \cdot 6{,}68773 \approx 0{,}66877.$$

За формулою трапецій (n=10)

$$I \approx \frac{b-a}{10}\left(\frac{y_0 + y_{10}}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_9\right) = 0{,}1 \cdot 6{,}93773 \approx 0{,}69377.$$

За формулою Сімпсона n=2m=10

$$I \approx \frac{b-a}{6 \cdot 5}\left(y_0 + y_{10} + 2\left(y_2 + y_4 + y_6 + y_8\right) + 4\left(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9\right)\right) == \frac{1}{30} \cdot 20{,}79456 \approx 0{,}69315.$$

Згідно з таблицею натуральних логарифмів $I = \ln 2 \approx 0{,}693147$, і отже, найбільш точним виявилось обчислення за формулою Сімпсона.

Питання для самоконтролю:

- Що називається визначеним інтегралом?
- Сформулювати теорему про існування визначеного інтеграла.
- Сформулювати властивості визначеного інтеграла.
- Які методи обчислення визначеного інтегралу ви знаєте?

- У чому полягає метод інтегрування частинами у визначеному інтегралі?
- Які ви знаєте наближені методи обчислення визначених інтегралів?
- Вивести формулу трапецій для обчислення визначених інтегралів.