Самостійна робота №20.

Тема: Обчислення площ та об’ємів за допомогою визначеного інтегралу. (2год.)

Методичні рекомендації:

Опрацювати рекомендовану літературу за планом:

1. Обчислення площ плоских фігур за допомогою визначеного інтегралу.
2. Обчислення об’ємів тіл обертання за допомогою визначеного інтегралу.

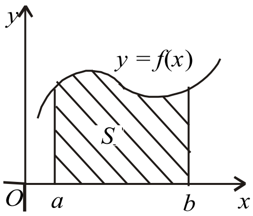
1. Обчислення площ плоских фігур за допомогою визначеного інтегралу.

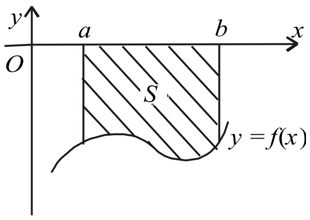
Якою б не була криволінійна фігура, що обмежена неперервними кривими лініями, шляхом її розсікання лініями паралельними осям координат, обчислення площі фігури можна звести до обчислення площ розглянутих нижче фігур.

I. Фігура обмежена лініями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ (рис. 1). Функція $f(x)$ — неперервна та $f(x) \geq 0$. Площа S такої криволінійної трапеції за геометричним змістом визначеного інтеграла така: $S = \int_a^b f(x)dx$.

Якщо при виконанні всіх інших умов $f(x) \leq 0$ (рис. 2),

$$S = \left| \int_a^b f(x)dx \right|.$$





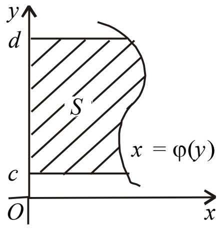


Рис. 1. *Рис. 2.* *Рис. 3.*

II. Фігура обмежена лініями $x = \varphi(y),\ x = 0,\ y = c,\ y = d$ (рис. 3). Функція $x = \varphi(y)$ — неперервна та $\varphi(y) \geq 0.$ Площа S такої фігури буде

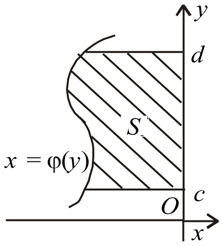
$$S = \int_c^d \varphi(y)dy,$$

а якщо $\varphi(y) \leq 0$ (рис. 4), то

$$S = \left| \int_c^d \varphi(y)\,dy \right|.$$

III. Фігура обмежена лініями $y = f(x)$, $y = g(x), x = a, x = b.$ Функції $f(x)$ та $g(x)$ — неперервні та $f(x) \geq g(x)$ для $x \in [a;\, b]$ (рис. 5). Площа S такої фігури визначається як різниця площ фігур aA_2B_1b та aA_2B_1b

$$S = \int_a^b \bigl(f(x) - g(x)\bigr)dx.$$



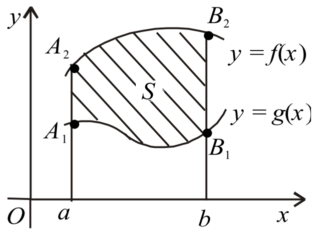


Рис. 4. *Рис. 5.*

2. Обчислення об'ємів тіл обертання за допомогою визначеного інтегралу.

Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* криволінійної трапеції, утвореної лініями *y=f(x), y=0, x=a, x=b* обчислюється за формулою

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)dx.$$

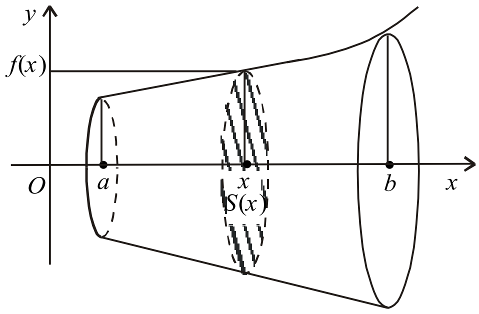


Рис. 6.

Зауваження. Аналогічно, об'єм тіла V_y, утвореного обертанням навколо осі *Oy* фігури, обмеженої лініями *x* = 0, $x=\varphi(y)\geq 0$, $y=c$, $y=d$, матиме вигляд

$$V_y = \pi\int_c^d (\varphi(y))^2 dy.$$

Рекомендована література:

1. Бубняк Т.І. Вища математика: Навчальний посібник. – Львів: "Новий світ–2000",2004, с.170-176.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.:А.С.К., 2001, с.401-408.

3. Пастушенко С.М., Підченко Ю.П. Вища математика. Довідник для студентів вищих навч.закладів: Навч. посібник. 2-е вид., виправлене і доповн. -К.: Діал.,2003, с.239-249.

Завдання для виконання:

Завдання 1. *Розв'язати приклади згідно свого варіанту (№ варіанту – остання цифра порядкового номеру по журналу):*

Обчислити площу фігури, обмеженої даними лініями. Зробити креслення.

1. $y = (x+3)^2(x-1)$; $y = -(x+3)^2$. 2. $y = (x+4)^2(x-1)$; $y = -(x+4)^2$.

3. $y = (x+2)^2(x+1)$; $y = (x+2)^2$. 4. $y = (x+4)^2(x+1)$; $y = (x+4)^2$.

5. $y = (x-5)^2(x+1)$; $y = (x-5)^2$; 6. $y = (x-2)^2(x+1)$; $y = 4(x+1)^2$.

7. $y = (x+3)^2(x+1)$; $y = (x+3)^2$. 8. $y = (x-2)^2(x+1)$; $y = (x-2)^2$.

9. $y = (x+2)^2(x-1)$; $y = -(x+2)^2$. 10. $y = (x-3)^2(x+1)$; $y = (x-3)^2$.

Завдання 2. *Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями:* $y = 2x - x^2 + 1,\ \ y = 0,\ \ x = 0$ *навколо вісі Ох.*

Приклади розв'язування вправ:

Приклад 1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями

$$y = -x^2 + 4x + 5 \text{ та } y = 2x - 3.$$

Розв'язання.

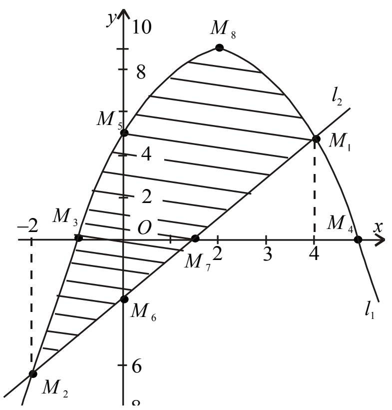


Рис. 7

Побудуємо фігуру, обмежену параболою $y=-x^2+4x+5$ (l_1) та прямою $y=2x-3$ (l_2) на координатній площині; при цьому знаходимо точки перетину заданих ліній між собою та з осями координат (рис.7).

$$l_1 \cap l_2 \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x^2+4x+5 \\ y=2x-3 \end{cases} \begin{cases} y=2x-3 \\ x^2-2x-8=0 \end{cases} \begin{cases} y=2x-3 \\ \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-2 \end{array}\right. \end{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=-7 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M_1(4;\ 5) \\ M_2(-2;\ -7). \end{array}\right.$$

$$l_1 \cap Ox \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x^2+4x+5 \\ y=0 \end{cases} \begin{cases} y=0 \\ x^2-4x-5=0 \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-1 \end{array}\right. \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M_4(5;\ 0) \\ M_3(-1;\ 0). \end{array}\right.$$

$$l_1 \cap Oy \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x^2+4x+5 \\ x=0 \end{cases} \begin{cases} y=5 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow M_5(0;\ 5).$$

$$l_2 \cap Ox \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=2x-3 \end{cases} \begin{cases} y=0 \\ x=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow M_7(1{,}5;\ \ 0).$$

$$l_2 \cap Oy \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2x-3 \end{cases} \begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow M_6(0;\ -3).$$

Точка $M_8(2;\,9)$ — вершина параболи $y-9=-(x-2)^2$.

Знайдемо площу фігури фігури $M_1M_8M_2$:

$$S=\int_{-2}^{4}\left(-x^2+4x+5-(2x-3)\right)dx=\int_{-2}^{4}(-x^2+2x+8)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+x^2+8x\right)\Bigg|_{-2}^{4}=$$

$$=-\frac{64}{3}+16+32-\left(\frac{8}{3}+4-16\right)=36.$$

Приклад 2. Обчислити площу фігури, обмеженої даними лініями. Зробити креслення.

$$y=(x+2)^2(1-x); \qquad y=-(x+2)^2$$

Розв'язання.

Знаходимо точки перетину даних ліній:

$$\begin{cases} y=(x+2)^2(1-x) \\ y=-(x+2)^2 \end{cases}$$

$$(x+2)^2(1-x)=-(x+2)^2$$

$$(x+2)^2(1-x)+(x+2)^2=0$$

$$(x+2)^2(1-x+1)=0$$

$$(x+2)^2(2-x)=0$$

$$\begin{cases} x_1=-2 \\ y_1=0 \end{cases} \quad \text{або}$$

$$\begin{cases} x_2=2 \\ y_2=-16 \end{cases}$$

Отже, точки перетину даних ліній мають координати $A(-2;0)$ і $D(2;-16)$.

Побудуємо графіки даних функцій.

Графіком функції $y=-(x+2)^2$ – є парабола з вершиною в точці $A(-2;0)$. Вітки параболи напрямлені вниз.

Дослідимо функцію $y=(x+2)^2(1-x)$.

1) ОДЗ: $x\in(-\infty;\infty)$.
2) Дослідимо функцію на парність (непарність):
   $y(-x)=(-x+2)^2(1+x)\neq y(x)\neq -y(x)\Rightarrow$ функція ні парна, ні непарна.
3) Перетин з осями: $x=0\Rightarrow y=4\Rightarrow B(0;4)$

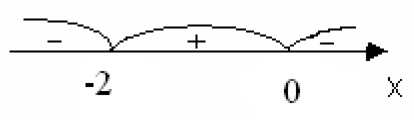
$$y=0\Rightarrow x_1=1; \quad x_2=-2\Rightarrow C(1;0) \quad i \quad A(-2;0)$$

4) Функція неперервна при $x\in(-\infty;\infty)$.

5) Знайдемо похідну функції

$$y' = 2(x+2)(1-x) + (x+2)^2(-1) = (2x+4)(1-x) - (x^2+4x+4) =$$
$$= 2x + 4 - 2x^2 - 4x - x^2 - 4x - 4 = -3x^2 - 6x = -3x(x+2)$$

$$y' = 0 \quad \Rightarrow$$
$$-3x(x+2) = 0$$
$$x_1 = 0; \quad x_2 = -2$$



Функція зростає при $x \in (-2;0)$ і спадає при $x \in (-\infty;-2) \cup (0;\infty)$.

$$x_{\min} = -2 \qquad x_{\max} = 0$$
$$y_{\min} = 0 \qquad y_{\max} = 4$$

Зробимо креслення (рис.8)

Знайдемо площу замкненої фігури на відрізку $[-2;2]$.

$$\int_{-2}^{2} \left((x+2)^2(1-x) - \left(-(x+2)^2\right)\right)dx = \int_{-2}^{2} \left((x+2)^2(1-x) + (x+2)^2\right)dx =$$
$$= \int_{-2}^{2} \left((x+2)^2(2-x)\right)dx = \int_{-2}^{2} \left((x^2+4x+4)(2-x)\right)dx = \int_{-2}^{2} \left(2x^2+8x+8-x^3-4x^2-4x\right)dx =$$

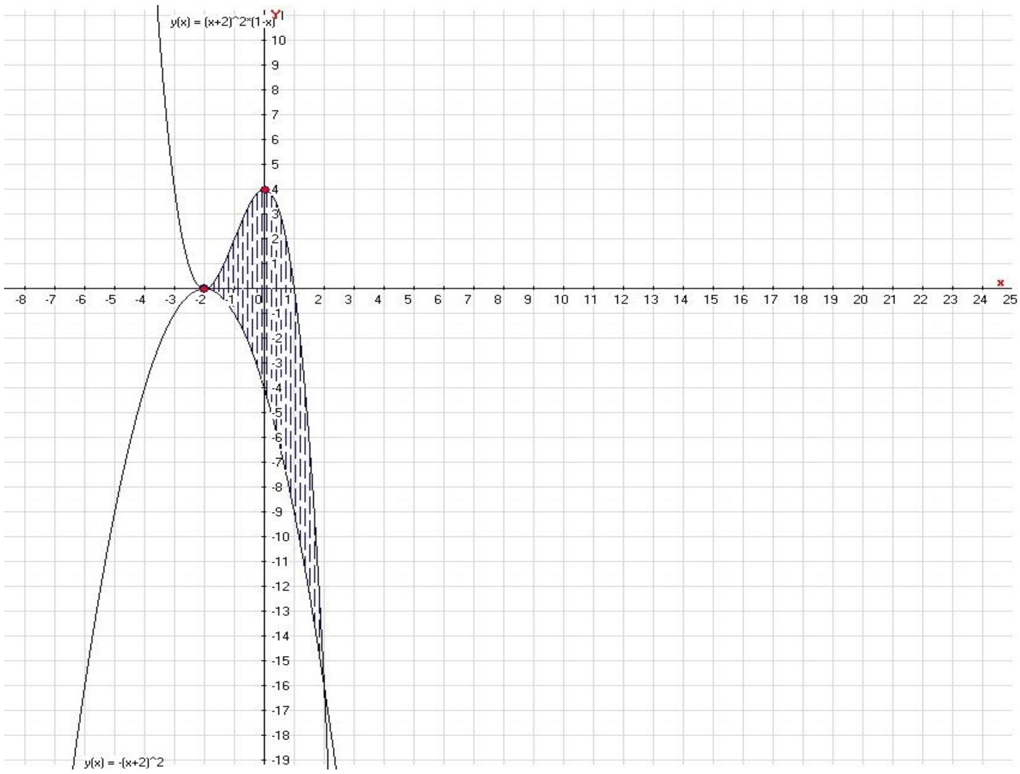


Рис. 8

$$= \int_{-2}^{2}\left(-x^3-2x^2+4x+8\right)dx = \left(-\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}+8x\right)\Bigg|_{-2}^{2} = \left(-\frac{2^4}{4}-\frac{2\cdot 2^3}{3}+\frac{4\cdot 2^2}{2}+8\cdot 2\right)-$$

$$-\left(-\frac{(-2)^4}{4}-\frac{2\cdot(-2)^3}{3}+\frac{4\cdot(-2)^2}{2}+8\cdot(-2)\right) = -4-\frac{16}{3}+8+16+4-\frac{16}{3}-8+16=$$

$$=32-\frac{32}{3}=32-10\frac{2}{3}=21\frac{1}{3}(\textit{кв.од.})$$

Відповідь: $21\frac{1}{3}(\textit{кв.од.})$.

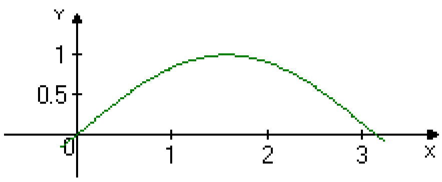


Рис. 9

Приклад 3. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням дуги синусоїди $y=\sin x$ навколо осі Ox для $x \in [0;\pi]$.

Розв'язання.

Візьмемо дугу синусоїди, зображену на рис.   Для якої $0 \le x \le \pi$. Маємо:

$$V = \pi\int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \pi\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x \right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} (\text{куб.од.})$$

Питання для самоконтролю:

- Як обчислити площу плоскої фігури в системі декартових координат? полярних координат?
- Записати формулу для обчислення об'ємів тіл обертання.
- Як знайти роботу змінної сили за допомогою визначеного інтегралу?
- Які інші застосування визначеного інтеграла ви знаєте?
- Охарактеризувати дві основні схеми застосування визначеного інтеграла до розв'язування практичних задач.