Самостійна робота №21.

Тема: Економічний зміст визначеного інтегралу. (2год.)

Методичні рекомендації:

Опрацювати рекомендовану літературу і зробити конспект за планом:

1. Економічний зміст визначеного інтегралу.
2. Задача знаходження капіталу за відомими чистими інвестиціями.
3. Розв'язування задач.

1. Економічний зміст визначеного інтегралу

I. Розглянемо криву попиту $P = f(Q)$ деякого товару. (Рис. 1.). Якщо P – ціна одиниці товару, то Загальна сума витрат по E приймання товару Q буде — $P \cdot Q$.

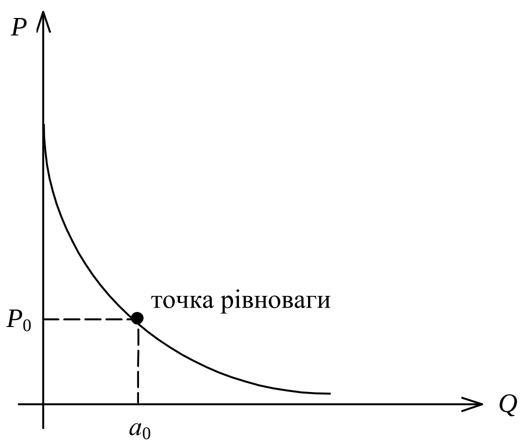


Рис.1.

На рис. 1 позначено P_0 — ціна рівноваги, a_0 — кількість товару, який продається за ціною P_0. Припустимо, що товар в кількості Q_0 не зразу весь попадає на ринок, а подається партіями в ΔQ. Мета продавця: утримувати ціну на товар вище рівноважної.

Після першої партії товару, його кількість на ринку буде

$$Q_1 = \Delta Q .$$

Ціна, що відповідає такій кількості товару — $P_1 = f(Q_1)$. Витрати споживача — $P_1 \Delta Q$.

Після другої партії товару, тобто кількість на рикну буде

$$Q_2 = Q_1 + \Delta Q = 2\Delta Q .$$

Відповідна ціна — $P_2 = f(Q_2)$. Витрати — $P_2 \Delta Q$.

Після n-ї партії, кількість товару — $Q_n = Q_0 = nQ$. Відповідна ціна — $P_n = f(Q_n) = f(Q_0) = P_0$. Витрати — $P_n \Delta Q$.

Загальні витрати споживачів на всю кількість товару Q_0, буде

$$P_1 \Delta Q + P_2 \Delta Q + \ldots + P_n \Delta Q = f_1(Q_1)\Delta Q + \ldots + f(Q_n)\Delta Q .$$

Графічна ілюстрація:

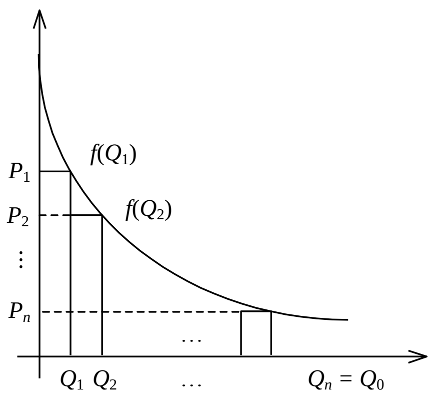


Рис. 2.

Як видно з рис. 2 загальні витрати споживачів дорівнюють сумі площин прямокутників, а це у свою чергу наближено дорівнюють визначеному інтегралу

$$f(Q_1)\Delta Q + f(Q_2)\Delta Q + \ldots + f(Q_n)\Delta Q \approx \int_0^Q f(Q)dQ$$

Наближена рівність буде точною, якщо n буде скільки завгодно великим.

Таким, сумарні витрати $S_{\text{вит.}}$ можна обчислити за формулою

$$\boxed{S_{\text{вит.}} = \int_0^{Q_0} f(Q)dQ}$$

Означення: Надлишок споживача $S_{\text{над.}}$ — це різниця між витратами споживача, які можуть бути і реальними витратами в умовах ринку:

$$\boxed{S_{\text{над.}} = \int_0^{Q} f(Q)dQ - P_0Q_0}$$

Геометрична інтерпретація:

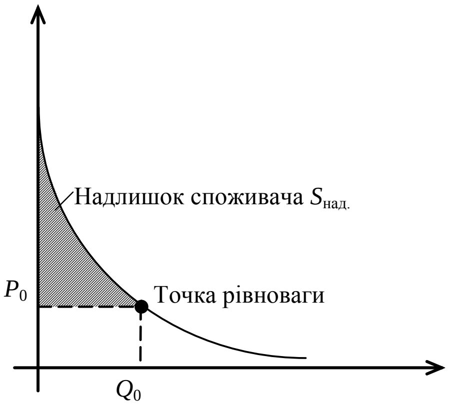
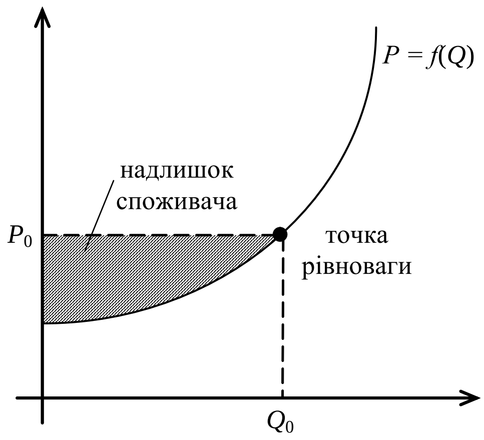


Рис. 3.

II. Додаткова вигода. Розглянемо криву пропозиції $P = f(Q)$. (Рис. 4).



Виробники іноді мають можливість поставляти товар на ринок по більш високій ціні, ніж та, на яку вони були згодні. Припускаючи, що весь товар Q_0 буде реалізовано за ціною P_0, можна знайти дохід $R = P_0 Q_0$.

Рис. 4.

З іншого боку, кількість товару, менше ніж Q_0 виробники поставляють, по більш низькій ніж P_0 ціна. Тоді додаткова вартість виробника $S_{\text{вигода}}$ обчислюються за формулою

$$S_{\text{вигода}} = P_0 Q_0 - \int_0^{Q_0} f(Q)dQ.$$

2. Задача знаходження капіталу за відомими чистими інвестиціями.

Нагадаємо, що чисті інвестиції — це загальні інвестиції, які надходять в економіку за певний проміжок часу, за відрахуванням інвестицій на відшкодування витраченого капіталу. Таким чином, за одиницю часу капітал збільшується на суму чистих інвестицій.

Якщо позначити через $K(t)$ капітал як функцію часу, а чисті інвестиції — $I(t)$, то згідно зі сказаним можна записати:

$$I(t) = \frac{d}{dt}K(t),$$

тобто чисті інвестиції — це похідна від капіталу за часом t.

Часто доводиться відшукувати приріст капіталу за період з моменту часу t_1 до t_2, тобто

$$\Delta K = K(t_2) - K(t_1).$$

Оскільки $K(t)$ є первісною для функції $I(t)$, можна записати:

$$\Delta K = K(t_2) - K(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt.$$

Рекомендована література:

1. Бубняк Т.І. Вища математика: Навчальний посібник. – Львів: "Новий світ–2000",2004, с.170-176.

Завдання для виконання:

Задача. Фонди однієї організації зростають завдяки щорічним кампаніям літніх таборів для малозабезпечених.

Витрати на кампанію становлять 10000 грн. щодня. Відомо, що внески великі на початку кампанії, надалі вони спадають. Функція, що описує одержання внесків за один день, має вигляд:

$c(t)=-100t^2+20000$, де t – дні, $c(t)$ – внески за день.

Організація хоче максимально збільшити отриману суму доходів.

Визначте, скільки часу треба проводити кампанію для отримання максимальної суми доходу.

Чому дорівнюють загальні витрати на кампанію ?

Чому дорівнюють загальні внески ?

Чому дорівнює дохід, що очікується ?

3.Приклади розв’язування вправ:

Приклад 1. Визначити приріст капіталу за три роки по заданим чистим інвестиціям

$$I(t) = 9000t^{1/2}.$$

Розв’язання.

Безпосереднє застосування формули $\Delta K = K(t_2) - K(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt$ дає:

$$\Delta K = K(3) - K(0) = \int_0^3 9000t^{1/2}dt =$$

$$= 9000\left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_0^3 = 9000\cdot\frac{2}{3}\cdot 3^{3/2} = 6000\cdot 3^{3/2}$$

Приклад 1. За даними інвестиціями $I(t) = 9000t^{1/2}$, знайти, за скільки років приріст капіталу становитиме 150 000.

Розв’язання.

Маємо ΔK = 150 000. Позначимо шуканий проміжок часу через T. Тоді:

$$\Delta K = \int_0^T I(t)dt,$$

або

$$150\ 000 = \int_0^T 9\,000t^{1/2}dt \Rightarrow 50 = 3\int_0^T t^{1/2}dt \Rightarrow 50 = 3\cdot\left.\frac{t^{3/2}}{3/2}\right|_0^T \Rightarrow 50 = 2\cdot T^{3/2}.$$

Остаточно маємо:

$$25 = T^{3/2} \Rightarrow T = (25)^{\frac{2}{3}} \approx 8{,}54989.$$

Отже, потрібно 8,54989 років, щоб приріст капіталу досяг 150 000.

Питання для самоконтролю:

- Що можна сказати про застосування визначеного інтегралу в економіці?
- Охарактеризувати дві основні схеми застосування визначеного інтеграла до розв’язування практичних задач.
- Як формулюється задача знаходження капіталу за відомими чистими інвестиціями?
- Які інші застосування визначеного інтеграла ви знаєте?