Самостійна робота №22.

Тема: Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними. (2год.)

Методичні рекомендації:

Опрацювати рекомендовану літературу за планом:

1. Диференціальні рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними.
2. Розв'язування прикладів.

1. Диференціальні рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними.

Диференціальне рівняння – рівняння, в яке входять: незалежна зміна *x*, шукана функція *y* та її похідні або диференціали.

$$F(x,y,y')=0, \quad F(x,y,y'')=0$$

Порядок диференціального рівняння – порядок старшої похідної або диференціала, що входить у дане рівняння.

Розв'язок або інтеграл диференціального рівняння – функція, яка перетворює диференціальне рівняння в тотожність.

Загальний розв'язок диференціального рівняння – розв'язок, до якого входить стільки незалежних довільних сталих, який порядок рівняння.

Частинний розв'язок диференціального рівняння – розв'язок, знайдений із загального при різних числових значеннях довільних сталих.

Задача Коші – задача знаходження частинного розв’язку диференціального рівняння при заданих початкових умовах.

Означення. ДР виду

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \qquad (1)$$

називається ДР з *відокремленими змінними*. Загальний розв’язок ДР подається так:

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C, \qquad (2)$$

а розв’язок задачі Коші з початковими умовами $x = x_0$, $y = y_0$ має вигляд

$$\int_{x_0}^{x} M(x)dx + \int_{y_0}^{y} N(y)dy = 0. \qquad (3)$$

ДР з відокремленими змінними зводиться до квадратури, тобто до знаходження інтегралів.

Інтегральними кривими є концентричні кола з центром у початку координат.

Означення. Диференціальне рівняння виду

$$N_1(y)M_1(x)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \qquad (4)$$

називається ДР з *відокремлюваними змінними*, тобто рівнянням, що зводяться до ДР з відокремленими змінними.

Поділивши рівняння (6) на $N_1(y)\, M_2(x)$, дістанемо ДР з відокремленими змінними:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0. \qquad (5)$$

Рівняння (7) має розв'язок $y = y_k$, $x = x_j$, де $y = y_k$, $x = x_j$ є розв'язками рівнянь $N_1(y) = 0$, $M_2(x) = 0$.

Аналогічно ДР виду

$$y' = f_1(x) f_2(y) \qquad (6)$$

є ДР з відокремлюваними змінними. Рівняння (8) можна записати у вигляді:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y), \ \frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) dx. \qquad (7)$$

Рівняння (6) має розв'язок виду $y = y_k$, де $f_2(y_k) = 0$.

Рекомендована література:

1. Валєєв К. Г., Джалладова І. А., Лютий О. І. та ін. Вища математика: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. /— Вид. 2-ге, перероб. і доп. — К.: КНЕУ, 2002, с.464-497.
2. Бубняк Т.І. Вища математика: Навч.посібник. – Львів.,2004. – стор. 181-198.
3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.:А.С.К., 2001, с.421-430.
4. Пастушенко С.М., Підченко Ю.П. Вища математика. Довідник для студентів вищих навч.закладів: Навч. посібник. 2-е вид., виправлене і доповн. -К.: Діал.,2003, с.336-342.

Завдання для виконання:

Завдання. *Розв'язати рівняння згідно свого варіанту (№ варіанту – остання цифра номера по журналу):*

1. $\sqrt{1-x^2}\,y'+xy=0$

2. $(\sin x)y'=y\ln y$

3. $y'=e^{x+y}$

4. $y\sin x dx+\cos x dy=0$

5. $e^y(1+x^2)dy-2x(1+e^y)dx=0$

6. $(1+x)dy=2ydx$

7. $xydx+(x+1)dy=0$

8. $(1+x)dx-xdy=0$

9. $xy'+y=y^2$

10. $dy-xy(y+2)dx=0$

2. Приклади розв'язування вправ:

Приклад 1. Знайдемо загальний розв'язок ДР $y'=2xy^2$.

Розв'язання.

Запишемо рівняння у вигляді

$$\frac{dy}{dx}=2xy^2,$$

$$\frac{dy}{y^2}=2xdx,$$

$$\int\frac{dy}{y^2}=\int 2xdx$$

або

$$-\frac{1}{y}=x^2+C,$$

$$y=-\frac{1}{x^2+C}.$$

Приклад 2. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння $(1+x^2)dy+ydx=0$, при початкових умовах $y(1)=1$.

Розв'язання.

Розділивши обидві його частини на добуток $y(1+x^2)$, одержимо:

$$\frac{dy}{y}+\frac{dx}{1+x^2}=0,\quad \frac{dy}{y}=-\frac{dx}{1+x^2}.$$

Змінні відокремлені. Інтегруючи одержану рівність, знайдемо загальний інтеграл:

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{1+x^2}$$
$$\ln|y|=-artgx+C.$$

Підставивши в загальний розв'язок початкові умови y=1 при x=1, одержимо:

$$ln(1)=-arctg(1)+C$$

$$0=-\pi/4+C$$

$$C=arctg(1)$$

$$C=\pi/4.$$

Отже після підстановки знайденого значення C у загальний інтеграл, знайдемо частинний інтеграл – розв'язок задачі Коші

$$lny=-arctgx+\pi/4$$

Питання для самоконтролю:

- Дайте означення диференціального рівняння першого порядку.
- Що називається розв'язком диференціального рівняння?

- Дайте означення загального і частинного розв’язків диференціального рівняння?
- Що таке особливий розв’язок диференціального рівняння? Який його геометричний зміст?
- Що таке задача Коші?
- Дайте означення диференціального рівняння з відокремлюваними змінними. Наведіть приклади.
- Сформулюйте правило знаходження загального розв’язку диференціального рівняння з відокремлюваними змінними.