Самостійна робота №23.

Тема: Розв'язування лінійних ДР першого порядку і ДР що зводяться до лінійних. (2год.)

Методичні рекомендації:

Опрацювати рекомендовану літературу за планом:

1. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку та ті, що зводяться до них.
2. Розв'язування прикладів.

1. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку та ті, що зводяться до них.

Означення. Диференціальні рівняння виду

$$y' + P(x)y' = Q(x) \qquad (1)$$

називається *лінійним ДР*. Якщо $Q(x) \equiv 0$, то ДР є однорідним. Якщо $Q(x) \equiv 0$, то ДР називається *неоднорідним*.

Однорідні рівняння інтегруються у квадратурах, як ДР із відокремленими змінними:

$$y' + P(x)y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -P(x)y, \quad \frac{dy}{y} = -P(x)dx,$$

$$\int \frac{dy}{y} = -P(x)dx,$$

$$\ln|y| = -\int P(x)\,dx,$$

$$y = e^{-\int P(x)dx}.$$

Нехай відомий частинний розв'язок неоднорідного ДР.

Шукаємо загальний розв'язок неоднорідного ДР у вигляді $y = y_0(x) + z$.

Оскільки виконується тотожність $y_0'(x) + P(x)\, y_0(x) = Q(x)$, то для відшукання z маємо однорідне ДР $z' + P(x)z = 0$.

Отже, справджується така теорема:

Теорема 1. *Загальний розв'язок неоднорідного лінійного ДР дорівнює сумі частинного розв'язку неоднорідного ДР і загального розв'язку однорідного ДР.*

Зазвичай використовують три методи розв'язування лінійного неоднорідного ДР: метод Бернуллі, Ейлера і Лагранжа. Розглянемо метод Бернуллі.

Метод Бернуллі.

Розв'язок ДР (1) шукаємо у вигляді добутку двох функцій $y = u \cdot v$. Підставляючи, дістаємо рівняння $u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)$.

Зведемо це рівняння до системи ДР:

$$\begin{cases} uv' + P(x)uv = 0, \\ u'v = Q(x). \end{cases}$$

Із першого рівняння знаходимо змінну v:

$$v' = -P(x)v, \quad \frac{dv}{dx} = -P(x)v, \quad \frac{dv}{v} = -P(x)dx,$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int P(x)dx, \quad \ln|v| = -\int P(x)dx, \quad v = e^{-\int P(x)dx}.$$

Із другого рівняння знаходимо змінну *u*:

$$u' = Q(x)v^{-1}, \quad u' = Q(x)e^{\int P(x)dx}, \quad u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C.$$

Остаточно маємо розв'язок у вигляді

$$y = \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right) e^{-\int P(x)dx}. \qquad (2)$$

Метод Лагранжа

Лагранж запропонував загальний метод розв'язування неоднорідних лінійних ДР. Спочатку розв'язується однорідне ДР. У загальний розв'язок входять довільні сталі. Потім шукається загальний розв'язок неоднорідного ДР і при цьому довільні сталі стають новими шуканими функціями.

Шукатимемо розв'язок неоднорідного ДР (1).

Спочатку розв'яжемо однорідне ДР $y' + P(x)y = 0$. Загальний розв'язок має вигляд $y = Ce^{-\int P(x)dx}$. Шукаємо розв'язок неоднорідного ДР у вигляді $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$. Підставляючи в ДР (1), дістаємо рівняння

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} + C(x)e^{-\int P(x)dx}(-P(x)) + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x).$$

Приходимо до простого ДР

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x), C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1$$

і загального розв'язку неоднорідного ДР виду:

$$y = \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1\right)e^{-\int P(x)dx}.$$

Метод Лагранжа часто називають ***методом варіації довільної сталої***.

До лінійного ДР зводиться ДР Бернуллі

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0, \quad n \neq 1).$$

Вводиться нова змінна $z = \frac{1}{y^{n-1}}$, і ДР для z набирає вигляду ДР

$$\frac{z'}{1-n} + P(x)z = Q(x).$$

Рекомендована література:

1. Валєєв К. Г., Джалладова І. А., Лютий О. І. та ін. Вища математика: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. /— Вид. 2-ге, перероб. і доп. — К.: КНЕУ, 2002, с.464-497.
2. Бубняк Т.І. Вища математика: Навч.посібник. – Львів.,2004. – стор. 181-198.
3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.:А.С.К., 2001, с.430-438.
4. Пастушенко С.М., Підченко Ю.П. Вища математика. Довідник для студентів вищих навч.закладів: Навч. посібник. 2-е вид., виправлене і доповн. -К.: Діал.,2003, с.336-347.

Завдання для виконання:

Розв'язати приклад згідно свого варіанту (№ варіанту – остання цифра номера по журналу):

Завдання. *Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння*

$a(x)\, y' + b(x)\, y = f(x)$ і частинний розв'язок, який задовільняє початковій умові

$y = y_0$ *при* $x = x_0$.

1. $xy' + y = \frac{2x}{1+x^2}$; $y_0 = 0, x_0 = 1$.

2. $y'\cos x - 2y\sin x = 2$; $y_0 = 3, x_0 = 0$.

3. $y'\cos x + y\sin x = 1$; $y_0 = 2, x_0 = 0$.

4. $y' - 2y = 3x - 1$; $y_0 = 1/4, x_0 = 0$.

5. $y' - 4xy = x$; $y_0 = 3/4, x_0 = 0$.

6. $y' - y\sin x = e^{-\cos x}\sin 2x$; $y_0 = 3, x_0 = \pi/2$.

7. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$; $y_0 = 5, x_0 = 0$.

8. $y' + y = \frac{e^{-x}}{1+x^2}$; $y_0 = 2, x_0 = 0$.

9. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$; $y_0 = 5, x_0 = -2$.

10. $xy' - 3y = x^4e^x$; $y_0 = 5, x_0 = 0$.

2. Приклади розв’язування вправ:

Приклад 1. Знайдемо загальний розв’язок ДР

$$xy' + y = x^2.$$

Розв’язання.

Розв’язок шукаємо у вигляді добутку функцій $y = u \cdot v$. Підставляючи, дістаємо рівняння

$$x(u'v + uv') + uv = x^2.$$

Зведемо це рівняння до системи ДР:

$$\begin{cases} xuv' + uv = 0, \\ xu'v = x^2. \end{cases}$$

Із першого рівняння $xv' + v = 0$ знаходимо:

$$v' = -\frac{v}{x}, \qquad \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}, \qquad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = -\ln|x|, \quad v = x^{-1}.$$

Із другого рівняння маємо:

$$xu'x^{-1} = x^2, \ u' = x^2, \ u = \int x^2 dx, \ u = \frac{x^3}{3} + c.$$

Знаходимо розв’язок:

$$y = uv, \ y = \left(\frac{x^3}{3} + c \right) x^{-1}.$$

Приклад 2. Знайдемо за методом Лагранжа розв’язок неоднорідного лінійного ДР

$$y' + xy = 1 + x^2.$$

Розв’язання.

Спочатку знайдемо загальний розв’язок однорідного ДР:

$$y' + xy = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = -xy,$$

$$\frac{dy}{y} = -xdx,$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int x dx,$$

$$\ln|y| = -\frac{x^2}{2} + \ln C,$$

$$y = Ce^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Шукаємо розв’язок неоднорідного ДР у вигляді $y = C(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Підставивши в неоднорідне ДР, дістанемо

$$C'_{(x)}e^{-\frac{x^2}{2}} + C_{(x)}e^{-\frac{x^2}{2}}(-x) + xC_{(x)}e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 + x^2,$$

або

$$C'_{(x)} = \left(1 + x^2\right) e^{\frac{x^2}{2}}, \quad C(x) = \int \left(1 + x^2\right) e^{\frac{x^2}{2}} dx.$$

Використаємо формулу інтегрування частинами:

$$\int e^{\frac{x^2}{2}} dx = \left| \begin{array}{ll} u = e^{\frac{x^2}{2}}, & du = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x \\ dv = dx, & v = x \end{array} \right| = xe^{\frac{x^2}{2}} - \int x^2 e^{\frac{x^2}{2}} dx.$$

Отже, остаточно дістанемо загальний розв’язок ДР:

$$C(x) = \int e^{\frac{x^2}{2}} dx + \int x^2 e^{\frac{x^2}{2}} dx = xe^{\frac{x^2}{2}} + C_1,$$

$$y(x) = \left(xe^{\frac{x^2}{2}} + C_1 \right) e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad y(x) = x + C_1 e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Приклад 3. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння $\grave{a}(\tilde{o})\acute{o}' + b(x)y = f(x)$ і частинний розв’язок, який задовольняє початковій умові $y = y_0$ при $x = x_0$.

$$xy' + y = x \sin x; \qquad y_0 = 0, \quad x_0 = \pi.$$

Розв'язання.

Нехай $y = uv$, тоді $y' = u'v + uv'$. Підставивши це в рівняння, отримаємо:

$$(u'v + uv')x + uv = x\sin x$$
$$u'vx + u(v'x + v) = x\sin x \qquad (1)$$

Підберемо функцію v так, щоб $v'x + v = 0$

$$x\frac{dv}{dx} = -v$$
$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$$
$$\int\frac{dv}{v} = -\int\frac{dx}{x}$$
$$\ln|v| = -\ln|x|$$

$$\ln|v| = \ln\frac{1}{|x|}$$
$$v = \frac{1}{x}$$

Підставимо функцію v в рівняння (1), отримаємо:

$$u'\frac{1}{x}x = x\sin x$$
$$u' = x\sin x$$
$$du = x\sin xdx$$
$$\int du = \int x\sin xdx$$
$$u = \int x\sin xdx = \left|\begin{matrix} u = x & dv = \sin xdx \\ du = dx & v = \int\sin xdx = -\cos x\end{matrix}\right| =$$
$$= -x\cos x + \int\cos xdx = -x\cos x + \sin x + C$$
$$u = -x\cos x + \sin x + C$$

Отже загальний розв'язок диференціального рівняння буде

$$y_{заг} = uv = (-x\cos x + \sin x + C)\frac{1}{x}.$$

Використавши початкову умову $y(\pi)=0$, знайдемо

$$y=(-x\cos x+\sin x+C)\frac{1}{x}$$

$$(-\pi\cos\pi+\sin\pi+C)\frac{1}{\pi}=0$$

$$(-\pi(-1)+C)\frac{1}{\pi}=0$$

$$C=-\pi$$

Частинний розв'язок диференціального рівняння має вигляд:

$$y_{час}=(-x\cos x+\sin x-\pi)\frac{1}{x}$$

Відповідь: $y_{заг}=(-x\cos x+\sin x+C)\frac{1}{x}$; $y_{час}=(-x\cos x+\sin x-\pi)\frac{1}{x}$

Питання для самоконтролю:

- Дайте означення диференціального рівняння першого порядку.
- Що називається розв'язком диференціального рівняння?
- Дайте означення загального і частинного розв'язків диференціального рівняння?
- Що таке особливий розв'язок диференціального рівняння? Який його геометричний зміст?
- Що таке задача Коші?
- Сформулюйте правило знаходження загального розв'язку диференціального рівняння з відокремлюваними змінними.
- Що таке однорідні диференціальні рівняння?
- Які диференціальні рівняння називаються неоднорідними?

- В чому полягає метод Бернуллі?
- Що таке метод варіації сталої?