Самостійна робота №24.

Тема: Диференціальні рівняння, що допускають зниження порядку. Застосування ДР в економіці. (2год.)

Методичні рекомендації:

Опрацювати рекомендовану літературу за планом:

1. Диференціальні рівняння, що допускають зниження порядку.
2. Застосування ДР в економіці.
3. Розв'язування прикладів.

1. Диференціальні рівняння, що допускають зниження порядку.

У загальному випадку ДР другого порядку має вигляд

$$F(x, y, y', y'') = 0. \quad (1)$$

ДР другого порядку, розв'язане відносно старшої похідної — $y''= f(x, y, y')$.

Загальний розв'язок рівняння містить дві довільні сталі C_1 та C_2 і має вигляд

$$y = \varphi(x_1, C_1, C_2).$$

За рахунок вибору довільних сталих C_1, C_2 можна розв'язати **задачу Коші**, яка полягає в знаходженні частинного розв'язку $y = y(x)$ ДР, що задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0.$$

Для ДР другого порядку часто на практиці зустрічаються **крайові задачі**, коли умови на розв’язок задаються при різних значеннях аргументу.

Розглянемо прості випадки, коли вдається знизити порядок ДР другого порядку і звести його до ДР першого порядку.

У диференціальному рівнянні відсутня шукана функція y(x)

ДР виду (1) не містить шуканої функції y. Отже, можна знизити порядок рівняння, узявши

$$y' = z,\ y'' = z'.$$

При цьому дістанемо ДР першого порядку

$$F(x, z, z') = 0.$$

Якщо буде знайдено загальний розв’язок цього рівняння $z = z(x, C_1)$, то знайдемо і розв’язок ДР (1):

$$y = \int z(x, C_1)dx + C_2.$$

Диференціальне рівняння не містить явно аргументу

Порядок ДР

$$F(y, y', y'') = 0$$

можна знизити, якщо за нову незалежну змінну взяти y, а за шукану залежну змінну: $z = y'$. Маємо:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot z.$$

Початкове ДР другого порядку зводиться до ДР першого порядку

$$F\left(y,\ z,\ z\frac{dz}{dy}\right)=0.$$

Якщо буде знайдено розв'язок цього рівняння $z = z(y,\ C_1)$, то для відшукання загального розв'язку початкового ДР дістанемо рівняння

$$y'=z(y,C_1),\ \frac{dy}{dx}=z(y,C_1),\ \int\frac{dy}{z(y,C_1)}=x+C_2.$$

Диференціальне рівняння, однорідне відносно шуканої функції та її похдних

Якщо для ДР $F(x, y, y', y'') = 0$ виконано рівність

$$F(x, ty, ty', ty'') = t^m F(x, y, y', y''),$$

то ДР називається ***однорідним відносно шуканої функції і її похідних***. При цьому порядок ДР можна знизити, якщо взяти

$$y' = yz,\ \ y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz' = y(z' + z^2).$$

Початкове рівняння набирає вигляду

$$F(x, y, yz, y(z' + z^2)) = y^m F(x, 1, z, z' + z^2) = 0,$$

тобто зводиться до ДР першого порядку

$$F(x, 1, z, z' + z^2) = 0.$$

Якщо буде знайдено розв'язок цього ДР $z = z(y, C_1)$, то можна знайти y з рівняння:

$$\frac{y'}{y}=z(x,C_1),\ \int\frac{y'}{y}dx=\int z(x,C_1)dx,$$

$$\ln|y|=\int z(x,C_1)dx+\ln C_2,\ \ y=C_2e^{\int z(x,C_1)dx}.$$

2. Застосування ДР в економіці.

Розглянемо деякі із застосувань диференціальних рівнянь в економіці.

Неокласична модель зростання

Нехай $Z = P\ (K,\ L)$ – національний прибуток, де P –однорідна виробнича функція першого порядку:

$$P(tK,\ tL) = tP(K,\ L),$$

де K – обсяг капіталовкладень, L – обсяг витрат праці.

Якщо позначити через $k = \frac{K}{L}$ – величину фондоозброєності, тоді працездатність праці обчислюється за формулою

$$f(k) = \frac{P(K,\ L)}{L}.$$

Потрібно проаналізувати динаміку фондоозброєності.

Зробимо такі припущення.

1. Природний приріст трудових ресурсів з часом змінюється за законом:

$$L' = \alpha L. \qquad (2)$$

2. Інвестиції витрачаються на збільшення виробничих фондів і на амортизацію за законом:

$$I = K' + \beta K, \qquad (3)$$

де β — норма амортизації.

Тоді, якщо c — норма інвестиції,

$$K' = cP(K,\ L) - \beta K.$$

Очевидно, що

$$\ln k = \ln K - \ln L.$$

Диференціюючи цю рівність за t

$$\frac{k'}{k}=\frac{K'}{K}-\frac{L'}{L}. \tag{4}$$

Підставивши в (4) вирази (2), (3), дістанемо

$$k'=cf(k)-(\alpha+\beta)k. \tag{5}$$

Рівняння (4) є нелінійним диференціальним рівнянням 1-го порядку з відокремлюваними змінними, яке є автономним. Виділивши стаціонарний розв'язок цього рівняння, із умови $k'=0$ дістанемо

$$cf(k)-(\alpha+\beta)k=0, \tag{6}$$

де $k=const$ — корінь рівняння (6).

Модель природного зростання випуску

Вважатимемо, що деякий товар продається за ціною p. Позначимо через $Q(t)$ кількість товару, реалізованого на момент часу t. Тоді на цей момент часу отримано прибуток, що дорівнює $pQ(t)$. Нехай деяка частина прибутку витрачається на інвестиції у виробництво товару, який реалізується:

$$I(t)=kpQ(t), \quad k=const, \quad 0<k<1, \tag{7}$$

де k – норма інвестиції.

Якщо виходити з припущення, що ринок не насичується, то в результаті розширення виробництва буде отримано приріст прибутку, частина якого буде використана для розширення випуску товару. Це приведе до зростання швидкості випуску (акселерація), причому швидкість випуску пропорційна до збільшення інвестицій:

$$Q'=cI, \tag{8}$$

де c — норма акселерації. Підставивши в (8) формулу (7), дістанемо

$$Q'=lQ, \ l=ckp. \tag{9}$$

Диференціальне рівняння (9) є рівнянням першого порядку з відокремлюваними змінними. Загальний розв’язок цього рівняння має вигляд

$$Q = Ce^{lt}, \quad C = \mathrm{const}.$$

Зростання випуску в умовах конкуренції

Нехай $p = p(Q)$ – спадна функція, тобто зі збільшенням обсягу продукції на ринку ціна спадає: $\frac{dp}{dQ} < 0.$ З формул (7)–(9) дістанемо нелінійне диференціальне рівняння першого порядку відносно Q:

$$Q' = \gamma p(Q) \cdot Q, \qquad \gamma = k \cdot c. \tag{10}$$

Оскільки всі множники у правій частині цього рівняння додатні, то $Q' > 0,$ тобто функція $Q(t)$ — зростаюча. Характер зростання функції визначається її другою похідною. З рівняння (10) дістанемо

$$Q'' = \gamma\left[Q'p(Q) + Q\frac{dp}{dQ}Q'\right] = \gamma Q'\left(p + \frac{dp}{dQ}Q\right).$$

Цю рівність можна перетворити, якщо ввести еластичність попиту $\varepsilon(p) = \frac{p}{Q}\frac{dQ}{dp}.$ Звідси $Q'' = \gamma Q' p\left(1 + \frac{dp}{dQ}\frac{Q}{p}\right),$ або (оскільки $\frac{dQ}{dp} < 0$, то $\varepsilon < 0$) остаточно матимемо:

$$Q'' = \alpha Q' p\left(1 - \frac{1}{|\varepsilon|}\right). \tag{11}$$

З рівняння (11) маємо:

— у разі еластичного попиту $\left(|\varepsilon| > 1,\ Q'' > 0\right)$ — прогресуюче зростання;

— у разі нееластичного попиту $\left(|\varepsilon| < 1,\ Q'' < 0\right)$ — уповільнене зростання.

Зокрема, якщо $p(Q) = a - bQ, \quad a > 0, \quad b > 0$, рівняння (11) набирає вигляду

$$Q' = \gamma(a - bQ)Q. \qquad (12)$$

Звідси

$$Q'' = \gamma Q'(a - 2bQ). \qquad (13)$$

Зі співвідношень (12) і (13) дістанемо $Q' = 0$ при $Q = 0$ і $Q = \frac{a}{b}$, $Q'' > 0$ при $Q > \frac{a}{(2b)}$ і $Q = \frac{a}{(2b)}$ – точка перетину функції Q. Графік цієї функції називають **логістичною кривою** (рис. 1).

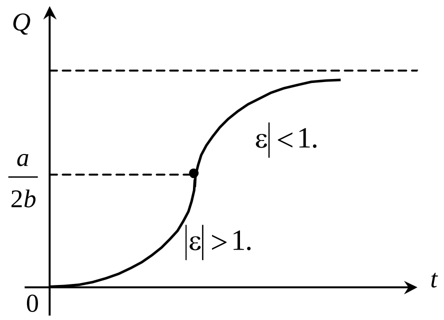

Рис. 1

Рекомендована література:

1. Валєєв К. Г., Джалладова І. А., Лютий О. І. та ін. Вища математика: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. /— Вид. 2-ге, перероб. і доп. — К.: КНЕУ, 2002, с.464-497.

2. Бубняк Т.І. Вища математика: Навч.посібник. – Львів.,2004. – стор. 190-194, 205-209.

3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.:А.С.К., 2001, с.455-460.

4. Пастушенко С.М., Підченко Ю.П. Вища математика. Довідник для студентів вищих навч.закладів: Навч. посібник. 2-е вид., виправлене і доповн. -К.: Діал.,2003, с.349-353.

Завдання для виконання:

Розв'язати приклад згідно свого варіанту (№ варіанту – порядковий номер по журналу):

Розв'язати диференціальні рівняння другого порядку, що допускають зниження порядку.

1. $(1-x^2)y''-xy'=2.$
2. $2xy'y''=y'^2-1.$
3. $x^3y''+x^2y'=1.$
4. $y''+y'\operatorname{tg}x=\sin 2x.$
5. $y''x\ln x=y'.$
6. $xy''-y'=x^2e^x.$
7. $y''x\ln x=2y'.$
8. $x^2y''+xy'=1.$
9. $y''=-x/y'.$
10. $xy''=y'.$
11. $y''=y'+x.$
12. $xy''=y'+x^2.$
13. $xy''=y'\ln(y'/x).$
14. $xy''+y'=\ln x.$
15. $y''\operatorname{tg}x=y'+1.$
16. $y''+2xy'^2=0.$
17. $2xy'y''=y'^2+1.$
18. $y''-\dfrac{y'}{x-1}=x(x-1).$
19. $y'''+y''\operatorname{tg}x=\sec x.$
20. $y''-2y'\operatorname{ctg}x=\sin^3 x.$
21. $y''+4y'=2x^2.$
22. $xy''-y'=2x^2e^x.$
23. $x(y''+1)+y'=0.$
24. $y''+4y'=\cos 2x.$
25. $y''+y'=\sin x.$
26. $x^2y''=y'^2.$

27. $2xy''y' = y'^2 - 4.$

28. $y'''x\ln x = y''.$

29. $y''\mathrm{ctg}\,x + y' = 2.$

30. $(1+x^2)y'' = 2xy'.$

3. Приклади розв'язування вправ:

Приклад 1. Знайдемо розв'язок ДР $y'' + y' = 0$.

Розв'язання.

Беручи $y' = z$, $y'' = z'$, знижуємо порядок ДР і приходимо до ДР першого порядку

$z' + z = 0.$

Знаходимо розв'язок ДР першого порядку:

$$\frac{dz}{dx} = -z,$$

$$\frac{dz}{z} = -dx,$$

$$\int \frac{dz}{z} = -\int dx,$$

$$\ln|z| = -x + \ln C_1,$$

$$z = C_1 e^{-x}.$$

Інтегруючи z, знаходимо загальний розв'язок ДР другого порядку

$$y' = C_1 e^{-x},\ \ y = \int C_1 e^{-x} dx + C_2,\ \ y = -C_1 e^{-x} + C_2.$$

Приклад 2. Знайдемо загальний розв'язок ДР другого порядку

$$y'' + \omega^2 y = 0,\ \ \omega = \mathrm{const}.$$

Розв'язання.

Беручи $y' = z$, дістаємо $y'' = z\dfrac{dz}{dy}$ і приходимо до ДР першого порядку:

$$z\frac{dz}{dy} + \omega^2 y = 0,\ \ zdz + \omega^2 ydy = 0,\ \ z^2 + \omega^2 y^2 = C_1^2.$$

Визначаємо змінну $z = \pm\sqrt{C_1^2 - \omega^2 y^2}$ і для відшукання y приходимо до ДР першого порядку

$$y' = \pm\sqrt{C_1^2 - \omega^2 y^2},\ \ \frac{dy}{\sqrt{C_1^2 - \omega^2 y^2}} = \pm dx,\ \ \frac{1}{\omega}\arcsin\frac{\omega y}{C_1} = \pm x + C_2.$$

Остаточно знаходимо загальний розв'язок початкового ДР

$$y = \frac{c_1}{\omega}\sin(\omega(\pm x + C_2)),$$

який можна записати також у вигляді

$$y = A\sin\omega(x - x_0),\ \ A = \text{const},\ x_0 = \text{const}.$$

Приклад 3. Знайдемо загальний розв'язок однорідного ДР

$$y''y + y'y' = 0.$$

Розв'язання.

Застосовуючи заміну $z = \dfrac{y'}{y}$, приходимо до ДР першого порядку

$$z' = -2z^2,\ \frac{dz}{dx} = -2z^2,\ -\frac{dz}{z^2} = 2dx,$$

$$-\int\frac{dz}{z^2} = \int 2dx,\ \frac{1}{z} = 2x + C_1,\ z = \frac{1}{2x + C_1}.$$

Остаточно знаходимо y із ДР:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2x + C_1},\ \int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{2x + C_1},\ \ln|y| = \frac{1}{2}\ln|2x + C_1| + \ln C_2.$$

$$y = C_2\sqrt{2x + C_1}.$$

Приклад 4. Для виробничої функції $P(K,\, L) = \sqrt{KL},$ знайти розв'язок рівняння $k' = cf(k) - (\alpha + \beta)k.$ і стаціонарний розв'язок.

Розв'язання.

Матимемо, що $f(k) = \sqrt{k},$ і тоді рівняння має вигляд

$$\frac{dk}{dt} = c\sqrt{k} - (\alpha + \beta)k.$$

Стаціонарний розв'язок цього рівняння можна дістати з рівняння

$$c\sqrt{k} - (\alpha + \beta)k = 0,$$

звідси випливає не нульовий розв'язок рівняння $k' = cf(k) - (\alpha + \beta)k.$: $k_{st} = \dfrac{c^2}{(\alpha + \beta)^2}.$

Диференціальне рівняння $c\sqrt{k} - (\alpha + \beta)k = 0,$ розв'язуємо методом відокремлювання змінних:

$$\frac{dk}{\sqrt{k}\left[c - (\alpha + \beta)\sqrt{k}\right]} = dt,$$

або остаточно

$$k(t) = \left[\frac{c}{\alpha + \beta} + \exp\left(-\frac{\alpha + \beta}{2}t\right)\right]^2.$$

Якщо $t \to \infty$, то $k(t) \to k_{st}.$

Отже, при незмінних параметрах *c, α, β* функція фондоозброєності стійко прямує до стаціонарного значення незалежно від початкових умов. У такому разі говорять, що $k = k_{st}$ є **точкою стійкої рівноваги**.

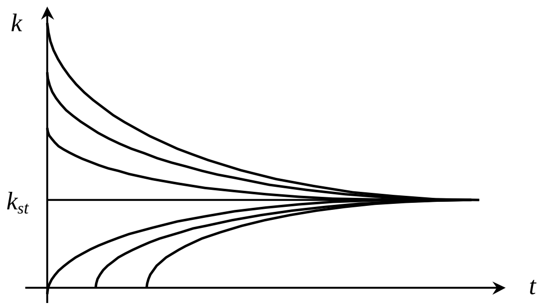

Рис. 1

Питання для самоконтролю:

- Дайте означення диференціального рівняння другого порядку.
- Що називається розв’язком диференціального рівняння?
- Дайте означення загального і частинного розв’язків диференціального рівняння?
- Що таке задача Коші?
- Які диференціальні рівняння допускають зниження порядку?
- Наведіть випадки, коли вдається знизити порядок ДР другого порядку і звести його до ДР першого порядку.
- Для розв’язання яких економічних задач використовуються диференціальні рівняння?