Самостійна робота №3.

Тема: Дії з векторами. Обчислення скалярного, векторного і мішаного добутків векторів. (2год.)

Методичні рекомендації:

Опрацювати рекомендовану літературу за планом:

1. Лінійні дії над векторами.
2. Лінійна залежність і незалежність системи векторів.
3. Базис і ранг системи векторів. Розклад вектора за базисом.
4. Обчислення скалярного, векторного і мішаного добутку векторів, кута між векторами.

1. Лінійні дії над векторами.

Вектор — напрямлений відрізок.

Координати вектора в системі координат Oxyz – це його проекції на осі координат: a_x =пр$_{0x}\vec{a}$, a_y=пр$_{0y}\vec{a}$, a_z =пр$_{0z}\vec{a}$.

Модуль вектора — довжина вектора, $|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Напрямні косинуси — косинуси кутів, що утворює вектор з осями координат: $\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}$, $\cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}$, $\cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$.

Сума квадратів напрямних косинусів довільного вектора дорівнює одиниці, тобто

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Орт вектора $\bar{a}$ – це одиничний вектор, напрям якого збігається з напрямом вектора $\bar{a}$.

Колінеарні вектори – це вектори, що лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Компланарні вектори **–** це три вектори, що лежать в одній площині або в паралельних площинах.

Лінійні дії над векторами – це дії додавання і віднімання векторів, множення вектора на число.

Лінійні операції над векторами мають такі властивості:

$\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$ - комутативність додавання векторів.

$(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$ - асоціативність додавання.

$\lambda(\mu\bar{a})=(\lambda\mu)\bar{a}$ - асоціативність відносно множення чисел.

$\lambda(\bar{a}+\bar{b})=\lambda\bar{a}+\lambda\bar{b}$ - дистрибутивність відносно додавання векторів.

$(\lambda+\mu)\bar{a}=\lambda\bar{a}+\mu\bar{a}$ - дистрибутивність відносно додавання чисел.

Якщо відомі координати векторів, то лінійним діям з векторами відповідають відповідні арифметичні дії над їхніми координатами.

Нехай задано вектори $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$ і дійсне число λ, тоді $\lambda\vec{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$, $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z)$.

Якщо вектори $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ та $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$ рівні, тобто мають однакові довжини і напрям, то їхні координати рівні

$$a_x=b_x,\quad a_y=b_y,\quad a_z=b_z.$$

і навпаки, якщо координати векторів рівні, то $\bar{a} = \vec{b}$.

Необхідною і достатньою умовою того, що вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ та $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ колінеарні, є пропорціональність їхніх проекцій:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda .$$

2. Лінійна залежність і незалежність системи векторів.

Лінійно залежна система векторів $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_л$ – це система, в якій хоча б один з векторів є лінійною комбінацією всіх інших векторів системи.

Лінійно незалежна система векторів $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_л$ – це система, в якій жоден з векторів не є лінійною комбінацією всіх інших векторів системи.

Система векторів, складена із одного вектора, за виключенням нульового вектора, завжди лінійно незалежна.

Зауваження. Якщо кожен із векторів $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_л$ і нуль вектор записати як матрицю стовпець, тоді умову лінійної залежності векторів можна записати у матричній формі. В результаті отримаємо однорідну систему лінійних рівнянь, відносно невідомих $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$. Якщо система має лише нульовий розв'язок, то вектори будуть лінійно незалежні. Якщо крім нульового система буде мати і ненульові розв'язки, то вектори $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_л$ лінійно залежні.

Властивості поняття лінійної залежності векторів:

1) Якщо серед векторів $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_л$ є нульовий , то ці вектори лінійно залежні.

2) Якщо вектори $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n$ лінійно залежні, то після додавання до них одного чи кількох нових векторів дістанемо лінійно залежну систему векторів.

3) Якщо вектори лінійно незалежні , то після відкидання одного чи кількох векторів дістанемо знову лінійно незалежні вектори.

4) Вектори лінійно залежні тоді і лише тоді, коли один з них є лінійною комбінацією інших.

5) Якщо два ненульові тривимірні вектори лінійно залежні, то вони колінеарні, і навпаки.

6) Якщо три ненульові тривимірні вектори лінійно залежні, то вони компланарні, і навпаки.

7) Чотири і більше тривимірних вектори завжди лінійно залежні.

3. Базис і ранг системи векторів. Розклад вектора за базисом

Базис на площині – довільна упорядкована пара не колінеарних векторів.

Базис у просторі – довільна упорядкована трійка не компланарних векторів.

Розкласти вектор за базисом – представити його у вигляді лінійної комбінації базисних векторів.

Якщо вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ складають базис і вектор $\bar{d}$ розкладений за цим базисом, т/б $\bar{d} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c}$, то числа α, β, γ називаються ***координатами вектора*** $\bar{d}$ в даному базисі, а вектори $\alpha\bar{a}, \beta\bar{b}, \gamma\bar{c}$ - ***складовими вектора*** $\bar{d}$. Кажуть також, що вектор $\bar{d}$ є лінійною комбінацією векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

4. Обчислення скалярного, векторного і мішаного добутку векторів, кута між векторами.

Скалярний добуток двох ненульових векторів $\vec{a}$ ***і*** $\vec{b}$ – число (скаляр), яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi$, де φ - кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Геометричний зміст скалярного добутку: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|пр_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|пр_{\vec{b}}\vec{a}$

Фізичний зміст скалярного добутку: Робота дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор переміщення:

$$A=\vec{F}\cdot\vec{S}=|\vec{F}|\cdot|\vec{S}|\cdot\cos\alpha\text{, де}$$

α-кут між вектором переміщення $\vec{S}$ і вектором сили $\vec{F}$.

Властивості скалярного добутку.

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ - комутативність множення

2. $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$ - асоціативність відносно множення на число λ

3. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ - дистрибутивність відносно додавання векторів.

4. Якщо $\vec{a}\neq 0$ $і$ $\vec{b}\neq 0$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$, коли кут між векторами $\vec{a}$ $і$ $\vec{b}$ - гострий, і $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$, коли кут між векторами $\vec{a}$ $і$ $\vec{b}$ - тупий.

5. Скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли ці вектори взаємно перпендикулярні.

6. Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини

$$\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$$

Скалярний добуток двох векторів, заданих координатами *– сума добутків їхніх відповідних координат*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z .$$

Кут між двома векторами. Із формули $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$ випливає, що

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|},$$

або в координатній формі

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}},$$

тобто *косинус кута між векторами дорівнює їхньому скалярному добутку, поділеному на добуток їхніх довжин.*

Векторний добуток вектора $\vec{a}$ ***на вектор*** $\vec{b}$ – вектор $\vec{c}$, який визначається такими трьома умовами:

1) довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$, де φ- кут між векторами $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;

3) якщо $\vec{c} \neq 0$, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів.

Властивості векторного добутку.

Розглянемо алгебраїчні властивості векторного добутку.

1°. Антикомутативність множення:

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$$

тобто від перестановки множників векторний добуток змінює знак.

2°. Асоціативність відносно скалярного множника λ:

$$\lambda\,\vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\times\lambda\,\vec{b} = \lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$$

3°. Дистрибутивність відносно додавання векторів:

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}\,.$$

Наведемо *геометричні властивості векторного добутку*.

4°. Векторний добуток двох векторів дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли ці вектори колінеарні.

5°. Модуль $|\vec{a}\times\vec{b}\,|$ векторного добутку неколінеарних векторів дорівнює площі S паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$, віднесених до спільного початку, тобто

$$S=|\vec{a}\times\vec{b}\,|$$

6°. Векторні добутки ортів задовольняють такі рівності:

$$\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = 0$$
$$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k},\quad \vec{j}\times\vec{k} = \vec{i},\quad \vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$$

Векторний добуток двох векторів, заданих координатами –

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k}$$

Площа трикутника, побудованого на двох векторах $\vec{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$ і $\vec{b} = \left(b_x, b_y, b_z\right)$, що виходять з однієї точки (вершини трикутника) –$S=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}\,|$.

Мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – число яке дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a}$ на векторний добуток векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$, тобто $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$, і за модулем дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Мішаний добуток векторів, заданих координатами –

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Об'єм піраміди побудованої на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – $V = \frac{1}{6}\left|(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})\right|$

Рекомендована література:

1. Бубняк Т.І. Вища математика: Навчальний посібник. – Львів: "Новий світ–2000",2004, с.31-39.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.:А.С.К., 2001.- Розділ 2, с.25-48.
3. Пастушенко С.М., Підченко Ю.П. Вища математика. Довідник для студентів вищих навч.закладів: Навч. посібник. 2-е вид., виправлене і доповн. -К.: Діал.,2003, с.52-75.

Завдання для виконання:

Розв'язати приклади згідно варіанту *(№ варіанта – порядковий номер по журналу)*:

Задача 1: Показати, що вектори $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ утворюють базис тривимірного простору і знайти координати вектора $\vec{x}$ в цьому базисі.

1. $\vec{x} = (-2;4;7), \quad \vec{p} = (0;1;2), \quad \vec{q} = (1;0;1), \quad \vec{r} = (-1;2;4).$
2. $\vec{x} = (6;12;-1), \quad \vec{p} = (1;3;0), \quad \vec{q} = (2;-1;1), \quad \vec{r} = (0;-1;2).$

3. $\vec{x}=(1;-4;4)$, $\vec{p}=(2;1;-1)$, $\vec{q}=(0;3;2)$, $\vec{r}=(1;-1;1)$.
4. $\vec{x}=(-9;5;5)$, $\vec{p}=(4;1,1)$, $\vec{q}=(2;0;3)$, $\vec{r}=(-1;2;1)$.
5. $\vec{x}=(-5;-5;5)$, $\vec{p}=(-2;0,1)$, $\vec{q}=(1;3;-1)$, $\vec{r}=(0;4;1)$.
6. $\vec{x}=(13;2;7)$, $\vec{p}=(5;1,0)$, $\vec{q}=(2;-1;3)$, $\vec{r}=(1;0;-1)$.
7. $\vec{x}=(-19;-1;7)$, $\vec{p}=(0;1,1)$, $\vec{q}=(-2;0;1)$, $\vec{r}=(3;1;0)$.
8. $\vec{x}=(3;-3;4)$, $\vec{p}=(1;0,2)$, $\vec{q}=(0;1;1)$, $\vec{r}=(2;-1;4)$.
9. $\vec{x}=(3;3;-1)$, $\vec{p}=(3;1,0)$, $\vec{q}=(-2;2;1)$, $\vec{r}=(-1;0;2)$.
10. $\vec{x}=(-1;7;-4)$, $\vec{p}=(-1;2,1)$, $\vec{q}=(2;0;3)$, $\vec{r}=(1;1;-1)$.
11. $\vec{x}=(6;5;-14)$, $\vec{p}=(1;1,4)$, $\vec{q}=(0;-3;2)$, $\vec{r}=(2;1;-1)$.
12. $\vec{x}=(6;-1;7)$, $\vec{p}=(1;-2,0)$, $\vec{q}=(-1;1;3)$, $\vec{r}=(1;0;4)$.
13. $\vec{x}=(5;15;0)$, $\vec{p}=(1;0,5)$, $\vec{q}=(-1;3;2)$, $\vec{r}=(0;-1;1)$.
14. $\vec{x}=(2;-1;11)$, $\vec{p}=(1;1,0)$, $\vec{q}=(0;1;-2)$, $\vec{r}=(1;0;3)$.
15. $\vec{x}=(11;5;-3)$, $\vec{p}=(1;0,2)$, $\vec{q}=(-1;0;1)$, $\vec{r}=(2;5;-3)$.
16. $\vec{x}=(8;0;5)$, $\vec{p}=(2;0,1)$, $\vec{q}=(1;1;0)$, $\vec{r}=(4;1;2)$.
17. $\vec{x}=(3;1;8)$, $\vec{p}=(0;1,3)$, $\vec{q}=(1;2;-1)$, $\vec{r}=(2;0;-1)$.
18. $\vec{x}=(8;1;12)$, $\vec{p}=(1;2,-1)$, $\vec{q}=(3;0;2)$, $\vec{r}=(-1;1;1)$.
19. $\vec{x}=(-9;-8;-3)$, $\vec{p}=(1;4,1)$, $\vec{q}=(-3;2;0)$, $\vec{r}=(1;-1;2)$.
20. $\vec{x}=(-5;9;-13)$, $\vec{p}=(0;1,-2)$, $\vec{q}=(3;-1;1)$, $\vec{r}=(4;1;0)$.
21. $\vec{x}=(-15;5;6)$, $\vec{p}=(0;5,1)$, $\vec{q}=(3;2;-1)$, $\vec{r}=(-1;1;0)$.
22. $\vec{x}=(8;9;4)$, $\vec{p}=(1;0,1)$, $\vec{q}=(0;-2;1)$, $\vec{r}=(1;3;0)$.
23. $\vec{x}=(23;-14;-30)$, $\vec{p}=(2;1,0)$, $\vec{q}=(1;-1;0)$, $\vec{r}=(-3;2;5)$.
24. $\vec{x}=(3;1;-3)$, $\vec{p}=(2;1,0)$, $\vec{q}=(1;0;1)$, $\vec{r}=(4;2;1)$.
25. $\vec{x}=(-1;7;0)$, $\vec{p}=(0;3,1)$, $\vec{q}=(1;-1;2)$, $\vec{r}=(2;-1;0)$.
26. $\vec{x}=(11;-1;4)$, $\vec{p}=(1;-1,2)$, $\vec{q}=(3;2;0)$, $\vec{r}=(-1;1;1)$.
27. $\vec{x}=(-13;2;18)$, $\vec{p}=(1;1,4)$, $\vec{q}=(-3;0;2)$, $\vec{r}=(1;2;-1)$.

28. $\vec{x}=(0;-8;9)$, $\vec{p}=(0;-2,1)$, $\vec{q}=(3;1;-1)$, $\vec{r}=(4;0;1)$.

29. $\vec{x}=(8;-7;13)$, $\vec{p}=(0;1,5)$, $\vec{q}=(3;-1;2)$, $\vec{r}=(-1;0;1)$.

30. $\vec{x}=(2;7;5)$, $\vec{p}=(1;0,1)$, $\vec{q}=(1;-2;0)$, $\vec{r}=(0;3;1)$.

Задача 2: Дані координати вершин піраміди ABCD. Необхідно:

1) Записати вектори $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ в системі орт і знайти модулі цих векторів;

2) знайти кут між векторами $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$;

3) знайти проекцію вектора $\overline{AD}$ на вектор $\overline{AB}$;

4) знайти площу грані ABC;

5) знайти об'єм піраміди ABCD.

1. A(2;-3;2), B(8;-1;5), C(2;0;6), D(3;4;1).
2. A(-1;3;-4), B(5;5;-1), C(-1;7;-1), D(0;5;2).
3. A(3;1;-3), B(9;3;0), C(6;1;-1), D(5;-3;-2).
4. A(3;5;-2), B(9;7;1), C(6;9;-2), D(2;1;-2).
5. A(0;5;-2), B(6;7;-1), C(4;5;1), D(2;-1;5).
6. A(0;-2;1), B(6;0;4), C(4;1;1), D(2;-2;3).
7. A(-1;3;2), B(5;6;4), C(-1;7;5), D(2;3;-1).
8. A(2;1;-3), B(8;4;-1), C(2;4;1), D(-1;0;6).
9. A(2;0;-2), B(8;3;0), C(5;0;2), D(-1;0;-3).
10. A(2;-3;1), B(8;0;3), C(5;1;1), D(-1;1;5).
11. A(-5;1;1), B(1;4;1), C(-1;1;2), D(2;3;-1).
12. A(-3;0;-7), B(3;3;-5), C(1;3;-7), D(2;3;1).
13. A(-3;1;4), B(-1;7;7), C(-3;4;8), D(-2;-1;3).
14. A(0;-3;1), B(2;3;4), C(0;1;4), D(2;-1;5).
15. A(-3;1;2), B(-1;7;5), C(0;1;6), D(2;-4;-5).

16. A(-5;-1;4), B(-3;5;7), C(-2;3;4), D(-2;4;0).
17. A(-3;-4;8), B(-1;-2;11), C(-1;-4;11), D(2;-1;7).
18. A(-8;2;-3), B(-6;8;0), C(-4;5;3), D(2;1;4).
19. A(-1;-2;4), B(1;1;10), C(-1;1;8), D(0;0;0).
20. A(-2;-1;0), B(0;2;6), C(-2;2;4), D(-1;5;0).
21. A(-3;-1;-5), B(-1;2;1), C(0;-1;-1), D(2;0;-1).
22. A(0;3;-5), B(2;6;1), C(3;7;-5), D(-1;2;4).
23. A(2;1;-5), B(4;4;1), C(6;1;-2), D(0;0;3).
24. A(3;0;0), B(5;3;6), C(7;3;0), D(-3;1;5).
25. A(3;-1;4), B(6;5;6), C(3;2;8), D(1;-3;-2).
26. A(8;-1;5), B(2;-3;2), C(3;4;1), D(2;0;6).
27. A(2;-3;1), B(6;-1;7), C(3;0;4), D(2;4;0).
28. A(-1;-2;3), B(5;0;3), C(0;-1;6), D(2;3;-1).
29. A(0;2;6), B(-2;-1;0), C(-1;5;0), D(-2;2;4).
30. A(2;0;0), B(8;-1;5), C(3;0;5), D(-3;4;-1).

Приклади розв'язування вправ.

Приклад 1. Показати, що вектори $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$, $\overline{a}_4$ утворюють базис чотири-вимірного простору і знайти координати вектора $\overline{b}$ в цьому базисі.

$$\tilde{a}_1(1;3;1;2),\quad \tilde{a}_2(-1;-2;-2;1),\ \tilde{a}_3(1;-1;-7;-3),\ \tilde{a}_4(-3;1;2;1),\ \overline{b}(5;20;11;9).$$

Розв'язання.

Вектори $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$, $\overline{a}_4$ утворюють базис чотиривимірного простору, якщо визначник складений з їх координат не дорівнює нулю. Обчислимо його:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&-1&1&-3\\3&-2&-1&1\\1&-2&-7&2\\2&1&-3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&1&-3\\0&1&-4&-8\\0&-1&-8&5\\0&3&-5&7\end{vmatrix}=1\cdot A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1&-4&-8\\-1&-8&5\\3&-5&7\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}1&-4&-8\\0&-12&-3\\0&7&31\end{vmatrix}=1\cdot A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}-12&-3\\7&31\end{vmatrix}=-372+21=-351\neq 0$$

Оскільки $\Delta\neq 0$, то вектори $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$, $\overline{a_4}$ лінійно незалежні, а отже утворюють базис чотиривимірного векторного простору.

Розкласти вектор $\bar{b}$ по векторах $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$, $\overline{a_4}$ - представити його у вигляді лінійної комбінації цих векторів:

$$\bar{b}=x_1\overline{a_1}+x_2\overline{a_2}+x_3\overline{a_3}+x_4\overline{a_4}\,.$$

На основі цієї векторної рівності одержуємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3-3x_4=5\\3x_1-2x_2-x_3+x_4=20\\x_1-2x_2-7x_3+2x_4=11\\2x_1+x_2-3x_3+x_4=9\end{cases}$$

Розв’яжемо систему рівнянь методом Гаусса:

Випишемо розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&1&-3&5\\3&-2&-1&1&20\\1&-2&-7&2&11\\2&1&-3&1&9\end{array}\right)$$

До другого рядка матриці додамо перший рядок помножений на (-3), до третього рядка додамо перший рядок помножений на (-1), а до четвертого - додамо перший помножений на (-2).

Отримаємо:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -8 & 5 \\ 0 & -1 & -8 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & -5 & 7 & -1 \end{array}\right)$$

До третього рядка додамо другий рядок, а до четвертого - додамо другий помножений на (-3).

Отримаємо

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -8 & 5 \\ 0 & 0 & -12 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 7 & 31 & -16 \end{array}\right)$$

Третій рядок матриці поділимо на (-12).

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -8 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -11/12 \\ 0 & 0 & 7 & 31 & -16 \end{array}\right)$$

До четвертого рядка додамо третій помножений на (-7).

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -8 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -11/12 \\ 0 & 0 & 0 & 117/4 & -115/12 \end{array}\right)$$

З останнього рівняння знаходимо невідому x_4: $117/4\,\tilde{o}_4 = -115/12 \Rightarrow \tilde{o}_4 = -\dfrac{115}{3\cdot 117} = -\dfrac{115}{351}$.

З третього рівняння знаходимо невідому x_3:

$$\tilde{o}_3 = -11/12 - 1/4\,\tilde{o}_4 = -\frac{11}{12} - \frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{115}{351}\right) = -\frac{293}{351}.$$

З другого рівняння отримаємо:

$$\tilde{o}_2 = 5 + 8\tilde{o}_4 + 4\tilde{o}_3 = 5 + 8\cdot\left(-\frac{115}{351}\right) + 4\cdot\left(-\frac{293}{351}\right) = 5 - \frac{2092}{351} = -\frac{337}{351}.$$

З першого рівняння знаходимо:

$$\tilde{o}_1 = 5 + 3\tilde{o}_4 - 1\tilde{o}_3 + \tilde{o}_2 = 5 + 3 \cdot \left(-\frac{115}{351}\right) - 1 \cdot \left(-\frac{293}{351}\right) + 1 \cdot \left(-\frac{337}{351}\right) = 5 - \frac{389}{351} = \frac{1366}{351} = 3\frac{313}{351}$$

Отже, $\tilde{o}_1 = 3\frac{313}{351}$, $\tilde{o}_2 = -\frac{337}{351}$, $\tilde{o}_3 = -\frac{293}{351}$, $\tilde{o}_4 = -\frac{115}{351}$.

Таким чином, координати вектора $\bar{b}$ в новому базисі:

$$\bar{b} = \left(3\frac{313}{351}, -\frac{337}{351}, -\frac{293}{351}, -\frac{115}{351}\right).$$

Відповідь: $\bar{b} = \left(3\frac{313}{351}, -\frac{337}{351}, -\frac{293}{351}, -\frac{115}{351}\right).$

Приклад 2. Дані координати вершин піраміди ABCD. Необхідно:

1) Записати вектори $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ в системі орт і знайти модулі цих векторів;

2) знайти кут між векторами $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$;

3) знайти проекцію вектора $\overline{AD}$ на вектор $\overline{AB}$;

4) знайти площу грані ABC;

5) знайти об'єм піраміди ABCD.

A(-1; -9; 4), B(2; -3; 6), C(-1; -5; 7), D (0; 3; -1).

Розв'язання.

1) Довільний вектор $\bar{a}$ може бути представлений в системі орт $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ таким чином:

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k},$$

де a_x, a_y, a_z - проекції вектора $\bar{a}$ на координатні осі *Ox, Oy, Oz*, а $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ - одиничні вектори, напрями яких співпадають з додатними напрямами осей *Ox, Oy, Oz*. Проекції вектора $\bar{a}$ на координатні осі знаходяться за формулами:

$$a_x = x_2 - x_1;\quad a_y = y_2 - y_1;\quad a_z = z_2 - z_1.$$

де x_1, y_1, z_1 – координати початку вектора, а x_2, y_2, z_2 – координати кінця вектора. Таким чином маємо

$$\overline{AB} = (2-(-1))\bar{i} + (-3-(-9))\bar{j} + (6-4)\bar{k} = 3\bar{i} + 6\bar{j} + 2\bar{k}$$
$$\overline{AC} = (-1-(-1))\bar{i} + (-5-(-9))\bar{j} + (7-4)\bar{k} = 0\bar{i} + 4\bar{j} + 3\bar{k}$$
$$\overline{AD} = (0-(-1))\bar{i} + (3-(-9))\bar{j} + (-1-4)\bar{k} = 1\bar{i} + 12\bar{j} - 5\bar{k}$$

Модуль вектора визначається за формулою:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_e^2 + a_z^2}\ ,$$

Отже,

$$|\overline{AB}| = \sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2} = \sqrt{9+36+4} = \sqrt{49} = 7$$
$$|\overline{AC}| = \sqrt{0^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$
$$|\overline{AD}| = \sqrt{1^2 + 12^2 + (-5)^2} = \sqrt{1+144+25} = \sqrt{170}$$

2) Косинус кута між двома векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$ знаходимо з означення скалярного добутку

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos(\bar{a},\bar{b})$$

Звідси

$$\cos(\bar{a},\bar{b}) = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}\ .$$

$$\cos\left(\overline{AB},\overline{AC}\right)=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|}=\frac{3\cdot 0+6\cdot 4+2\cdot 3}{7\cdot 5}=\frac{30}{35}=\frac{6}{7}.$$

3) Проекція вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ обчислюється за формулою

$$Пр_{\bar{b}}\bar{a}=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\left|\bar{b}\right|}$$

Тому

$$Пр_{\overline{AB}}\overline{AD}=\frac{\overline{AD}\cdot\overline{AB}}{\left|\overline{AB}\right|}=\frac{1\cdot 3+12\cdot 6-5\cdot 2}{7}=\frac{65}{7}.$$

4) Площа грані ABC дорівнює площі трикутника побудованого на векторах $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$, яка виражається через векторний добуток цих векторів таким чином:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$$

Підставляючи дані, маємо

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 3 & 6 & 2\\ 0 & 4 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6 & 4\\ 2 & 3\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix}3 & 2\\ 0 & 4\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}3 & 6\\ 0 & 4\end{vmatrix}\bar{k}=10\bar{i}-9\bar{j}+12\bar{k}$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\left|10\bar{i}-9\bar{j}+12\bar{k}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{100+81+144}=\frac{1}{2}\sqrt{325}=\frac{5\sqrt{13}}{2}\text{(кв.од.)}$$

5) Об’єм піраміди ABCD, побудованої на трьох некомпланарних векторах, дорівнює:

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\overline{AB}\left(\overline{AC}\times\overline{AD}\right)\right|,$$

де $\overline{AB}\left(\overline{AC}\times\overline{AD}\right)$ – мішаний добуток трьох векторів.

$$\overline{AB}\left(\overline{AC}\times\overline{AD}\right)=\begin{vmatrix}3 & 6 & 2\\ 0 & 4 & 3\\ 1 & 12 & -5\end{vmatrix}=3\cdot4\cdot(-5)+6\cdot3\cdot1+2\cdot0\cdot12-2\cdot4\cdot1-3\cdot12\cdot3-0\cdot6\cdot(-5)=-158$$

Отже

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\overline{AB}\left(\overline{AC}\times\overline{AD}\right)\right|=\frac{1}{6}\left|-158\right|=\frac{158}{6}=\frac{79}{3}\text{ (куб.од.)}$$

Питання для самоконтролю:

- Що називається вектором? Які види векторів ви знаєте?
- Дайте означення n-вимірного векторного простору.
- Які властивості має векторний простір?
- Яка система векторів називається лінійно залежною (лінійно незалежною)?
- Сформулюйте властивості поняття лінійної залежності векторів.
- Дайте означення базису системи векторів.
- Сформулюйте теорему про розклад вектора за базисом.
- Що називається рангом системи векторів?
- Що називається скалярним добутком векторів?
- Які властивості скалярного добутку ви знаєте?
- В чому полягає геометричний та механічний зміст скалярного добутку векторів?
- Сформулюйте умову перпендикулярності векторів.
- Як знайти кут між двома векторами?
- Що називається векторним добутком векторів?
- Сформулюйте властивості векторного добутку векторів.

- Які основні застосування векторного добутку ви знаєте?
- Як знайти площу трикутника, за допомогою векторного добутку векторів?
- Що називається мішаним добутком векторів?
- В чому полягає геометричний зміст мішаного добутку?
- Як обчислюються векторний і мішаний добутки векторів?