Самостійна робота №4.

Тема: Пряма і площина в просторі. Дослідження взаємних розташувань прямих і площин. (2год.)

Методичні рекомендації:

Опрацювати рекомендовану літературу і зробити конспект за планом:

1. Поняття рівняння поверхні в просторі.
2. Різні види рівнянь площини.
3. Різні види рівнянь прямої в просторі.

1. Поняття рівняння поверхні в просторі.

Означення 1. Рівнянням поверхні в просторі OXYZ називається рівняння виду

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (1)$$

яке пов'язує змінні *x, y, z* так, що координати довільної точки даної поверхні задовольняють це рівняння і не задовольняють координати тих точок, що не лежать на цій поверхні.

Найпростішим рівнянням (1) є випадок, коли x, y, z входять лінійно і тоді це зяяння описуватиме площину. Виведемо його.

Нехай M(x, y, z) - біжуча точка площини, $M(x_0, y_0, z_0)$ - фіксована точка площини.

Вектор $\overline{N}(A,B,C)$ - нормальний вектор до площини ($A^2+B^2+C^2\neq 0$). Вектор $\overline{MM_0}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ є нормальним до $\overline{N}$, отже скалярний добуток $\overline{MM_0}\cdot\overline{N}=0$. У розширеному вигляді

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (2)$$

Розкривши дужки та пере позначивши сталу, отримаємо рівняння

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (3)$$

Рівняння (3) - загальне рівняння площини. Отже, площина є поверхнею 1-го порядку.

2. Різні види рівнянь площини.

1. Загальне рівняння площини має вигляд

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (3)$$

де A,B,C- координати нормального вектора.

Часткові випадки:

а) $D=0$, рівняння (3) описує площину, яка проходить через початок координат;

б) $A=0$ – площина, паралельна до осі ОХ,

$B=0$ – площина, паралельна до осі ОУ,

$C=0$ – площина, паралельна до осі OZ.

в) А= $D=0$ – площина проходить через вісь ОХ і т.д.

г) $A=B=0$- площина, паралельна до площини ХОУ, і т.д.

2. Рівняння площини, яка проходить через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ з відомим

нормальним вектором $\overline{N}(A,B,C)$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (2)$$

Воно отримується із перпендикулярності векторів $\overline{N}(A,B,C)$ і $\overline{MM_0}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$.

3. Рівняння площини у відрізках на осях

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (4)$$

де *a* ,*b*, *c* - відрізки, які відтинає площина від осей координат, відповідно від ОХ, ОУ та OZ.

4. Рівняння площини через три точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ і $C(x_3, y_3, z_3)$, які не лежать на одній прямій має вигляд

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ x-x_3 & y-y_3 & z-z_3 \end{vmatrix}=0. \qquad (5)$$

5. Нормальне рівняння площини має вигляд

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0, \qquad (6)$$

причому

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \qquad (7)$$

де $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – напрямні косинуси нормалі до площини.

Кут між площинами. Умови паралельності і перпендикулярності площин. Відстань від точки до площини.

Нехай задано загальні рівняння двох площин

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases},$$

де $\overline{N}_1(A_1, B_1, C_1)$, $\overline{N}_2(A_2, B_2, C_2)$ – нормальні вектори до площин, тоді кут між площинами визначається як кут між нормальними векторами.

$$\cos\varphi = \frac{\overline{N_1} \cdot \overline{N_2}}{\left|\overline{N_1}\right| \cdot \left|\overline{N_2}\right|} \qquad (8)$$

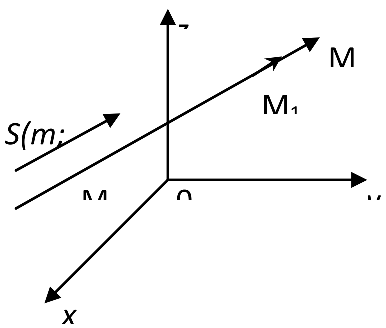
Виходячи з цього, площини паралельні, якщо паралельні їх нормальні вектори, тобто

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \qquad (9)$$

і перпендикулярні, якщо перпендикулярні нормальні вектори, тобто

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (10)$$

Відстань від точки до площини шукається аналогічно як відстань від точки до прямої



$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (11)$$

Рис.1.

3.Різні види рівнянь прямої в просторі.

1. Запишемо координати векторів $\overline{M_0M_1}(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ і

$\overline{M_0M}\,(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ (рис.1)

M_0 і M_1 – фіксовані, M- вільна точка прямої.

Виходячи з умови паралельності цих векторів, отримуємо *рівняння прямої в просторі, що проходить через дві точки*

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}. \qquad (12)$$

2. Вектор $\bar{S}(m,n,p)$ паралельний до $\overline{M_0M_1}(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0)$, тому

можна записати *канонічне рівняння прямої, яка проходить через одну точку із заданим напрямним вектором* $\bar{S}(m,n,p)$

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \qquad (13)$$

3. Від канонічного рівняння прямої можна перейти до параметричного рівняння

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}. \qquad (14)$$

4. Пряма в просторі може бути задана як перетин двох площин

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (15)$$

Кут між прямою і площиною.

Кут між прямою $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ і площиною $Ax+By+Cz+D=0$ визначається через скалярний добуток векторів $\overline{N}(A,B,C)$ і $\overline{S}(m,n,p)$

$$\sin\theta=\frac{\overline{N}\cdot\overline{S}}{|\overline{N}|\cdot|\overline{S}|}=\frac{Am+Bn+Cp}{|\overline{N}|\cdot|\overline{S}|} \qquad (16)$$

$\overline{N}\perp\overline{S}\Rightarrow Am+Bn+Cp=0$ – умова паралельності прямої і площини,

$\overline{N}\parallel\overline{S}\Rightarrow\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$ – умова перпендикулярності прямої і площини.

Рекомендована література:

1. Бубняк Т.І. Вища математика: Навчальний посібник. – Львів: “Новий світ–2000”,2004, с.59-65.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.:А.С.К., 2001.- Розділ 2, с.84-96.
3. Пастушенко С.М., Підченко Ю.П. Вища математика. Довідник для студентів вищих навч.закладів: Навч. посібник. 2-е вид., виправлене і доповн. -К.: Діал.,2003, с.116-131.

Завдання для виконання:

Розв’язати приклади:

1) Бубняк Т.І. Вища математика: Навчальний посібник. – Львів: “Новий світ–2000”,2004, стор.64-65, № 4, 7, 10, 24.

2) Задані координати вершин піраміди $A_1\ A_2\ A_3\ A_4$:

$$A_1\,(5;2;0),\ A_2(4;-2;1),\ A_3(10;1;7),\ A_4(0;\ 2;\ 6).$$

Знайти: а) точки перетину площини $A_1A_2A_3$ з осями координат,

б) канонічні рівняння прямої A_1A_2,

в) точки перетину прямої A_1A_2 з координатними площинами,

г) кут між площинами $A_1A_2A_3$ і $A_1A_2A_4$,

Приклади розв'язування вправ.

Приклад 1. Написати рівняння площини, яка паралельна до осі OZ і відтинає на осях OX і OY відрізки 2 і 3 см.

Розв'язання.

Виходячи з частинних випадків загального рівняння прямої (8.3), будемо шукати рівняння у вигляді

$$Ax + By + D = 0$$

Перетворимо його так

$$\frac{A}{-D}x + \frac{B}{-D}y = 1$$

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} = 1$$

Враховуючи, що

$$\begin{cases} -\frac{D}{A} = 2 \\ -\frac{D}{B} = 3 \end{cases},$$

маємо $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \;\Rightarrow\; 3x + 2y - 6 = 0$.

Приклад 2. Задані координати вершин піраміди $A_1\ A_2\ A_3\ A_4$:

$A_1\ (2;1;0), A_2(3;-1;2),\ A_3(13;3;\ 10), A_4(0;\ 1;\ 4)$.

Знайти: а) точки перетину площини $A_1A_2A_3$ з осями координат,

б) канонічні рівняння прямої A_1A_2,

в) точки перетину прямої A_1A_2 з координатними площинами,

г) кут між площинами $A_1A_2A_3$ і $A_1A_2A_4$,

Розв'язання.

а) використовуючи формулу рівняння площини, що проходить через три точки $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ x-x_3 & y-y_3 & z-z_3 \end{vmatrix}=0$, знайдемо рівняння площини $A_1A_2A_3$

$$A_1A_2A_3=\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 1 & -2 & 2 \\ 11 & 2 & 10 \end{vmatrix}=0.$$

Розкриваючи визначник, отримаємо

$$(x-2)\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 10 \end{vmatrix}-(y-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 11 & 10 \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 11 & 2 \end{vmatrix}=0,$$

$$2x-y-2z-3=0.$$

Це і є шукане рівняння, яке перетворимо в рівняння площини у відрізках

$$2x-y-2z-3=0 \Leftrightarrow \frac{x}{\frac{3}{2}}+\frac{y}{-3}+\frac{z}{-\frac{3}{2}}=1.$$

Таким чином, площина перетинає осі координат *Ox, Oy, Oz* відповідно в точках M_1 (3/2; 0; 0), M_2 (0; -3; 0), M_3 (0; 0; -3/2);

б) складемо рівняння площини $A_1A_2A_4$ за формулою

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ x-x_3 & y-y_3 & z-z_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x+2y+z-6=0.$$

Виходячи з того, що будь-яка пряма є перетином двох площин $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$, рівняння прямої A_1A_2 буде мати вигляд

$$\begin{cases} 2x-y-2z-3=0, \\ 2x+2y+z-6=0. \end{cases}.$$

Знайдемо канонічне рівняння прямої A_1A_2. Для цього припустивши, наприклад $z=0$, із системи

$$\begin{cases} 2x-y=3, \\ 2x+2y=6, \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 12, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6,$$

отримаємо $x=2$, $y=1$. Отже точка M_1 (2; 1; 0),яка у даному випадку збігається з точкою A_1, лежить на прямій A_1A_2.

Тепер визначимо напрямний вектор $\vec{s}$. Маємо:

$\overrightarrow{N_1}$ = (2; - 1; - 2), $\overrightarrow{N_2}$ = (2; 2; 1), звідси $\vec{s} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2} = |4.32| = \vec{i} - 6\vec{j} + 6\vec{k}$, тобто

m=3, n=-6, p=6. Підставляючи знайдені значення координат точки A_x і вектора $\vec{s}$ до формули $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$, отримаємо канонічні рівняння даної прямої $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-6} = \frac{z}{6} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$.

в) Точки перетину прямої з координатними площинами отримаємо з канонічних рівнянь прямої таким чином:

$$z = 0\ (Oxy),\ \ \frac{x-2}{1} = 0 \Rightarrow x = 2,\ \ \frac{y-1}{-2} = 0 \Rightarrow y = 1,\quad M_1(2;1;0);$$
$$y = 0\ (Oxy),\ \ \frac{x-2}{1} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{2},\ \ \frac{z}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow z = 1,\quad M_2\left(\frac{5}{2};0;1\right);$$
$$x = 0\ (Oyz),\ \ \frac{y-1}{-2} = -2 \Rightarrow y = 5,\ \ \frac{z}{2} = -2 \Rightarrow z = -4,\ \ M_3(0;5;-4).$$

г) За кут між площинами $A_1A_2A_3$ і $A_1A_2A_4$, згідно з (5.22), вибирається кут між їх нормальними векторами

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{N_2}\right|} = \frac{0}{9} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos 0 = 90^0.$$

Позначимо через $\overrightarrow{N_3}$ = (0; 0; 1) - нормальний вектор координатної площини Oxy. Тоді кут β між площинами $A_1A_2A_3$ і Oxy також обчислюється за формулою (5.22)

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_3}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{N_3}\right|} = -\frac{2}{3} \quad \Rightarrow = 180^0 - \arccos 0{,}6667 \approx \left|ДД:5\right| \approx 132^0;$$

Питання для самоконтролю:

- Що називається рівнянням поверхні в просторі?
- Як довести що площина є поверхнею першого порядку?
- Які рівняння площини ви знаєте?
- Як знайти кут між двома площинами?
- Який існує зв'язок між загальними рівняннями двох паралельних площин, перпендикулярних площин?

- Як знайти відстань від точки до площини?
- Як знайти пряму перетину двох площин?
- Які види рівнянь прямої в просторі ви знаєте?
- Сформулюйте умови паралельності і перпендикулярності прямої і площини.
- За якою формулою знаходиться кут між прямою і площиною?