



Самостійна робота №5.

Тема: Розв'язування вправ на функції. Найважливіші функції, які зустрічаються в економіці. (2год.)

Методичні рекомендації:

Опрацювати рекомендовану літературу та зробити конспект за планом:

1. Найважливіші функції, які зустрічаються в економіці. Графіки попиту, пропозиції, їх аналітичний та геометричний вирази.
2. Розв'язування вправ на функції.
3. Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень.

1. Найважливіші функції, які зустрічаються в економіці.

Графіки попиту, пропозиції, їх аналітичний та геометричний вирази.

Спектр використання функцій в економіці досить широкий. Найчастіше використовуються в економіці такі функції:

1. *Функція корисності* – залежність корисності, тобто результату, ефекту деякої дії, від рівня (інтенсивності) цієї дії.
2. *Виробнича функція* – залежність результату виробничої діяльності від факторів, які його зумовлюють.
3. *Функція випуску* (частковий вид виробничої функції) – залежність обсягу виробництва від наявності або споживання ресурсів.

4. *Функція витрат* (частковий вид виробничої функції) – залежність витрат виробництва від обсягу продукції.

5. *Функція попиту, споживання і пропозиції* – залежність обсягу попиту, споживання або пропозиції, щодо окремих товарів або послуг від різних факторів (наприклад, ціни, доходу і т.д.)

Нехай ринок якого-небудь окремого товару характеризується наступними функціями попиту та пропозиції:

$$D=D(P), S=S(P).$$

Для існування рівноваги, ціна повинна бути такою, щоб товар на ринку був розпроданий, тобто виконувалась рівність

$$D(P)=S(P).$$

Ціна рівноваги P задається цим рівнянням (яке може мати множину рішень), а відповідний об'єм покупок-продажів, позначуваний через X , - наступним рівнянням:

$$(X=D(P)=S(P)).$$

Побудуємо на рисунку 1 графіки попиту і пропозиції, зобразимо ціну рівноваги P .

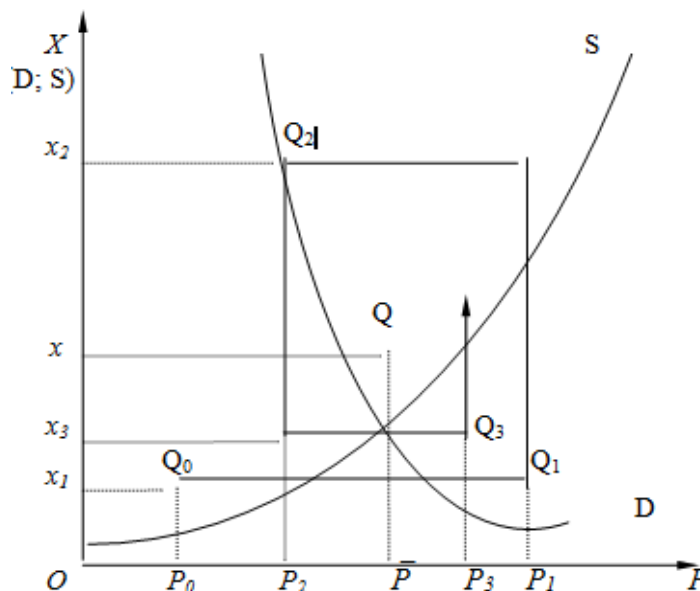


Рис. 1. D – крива попиту, S – крива пропозиції, P - ціна рівноваги .

Враховуючи, що економічні явища і процеси обумовлені впливом різних факторів, для їх дослідження широко використовують функції багатьох змінних.

Якщо впливом побічних факторів можна знехтувати або вдається зафіксувати ці фактори на певних рівнях, то залежність одного основного фактора вивчається з допомогою функції однієї змінної.

3. Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень.

1) *паралельний перенос на вектор $(0; b)$ уздовж осі ординат.*

Для побудови графіка функції $f(x) + b$, де b — постійне число, треба перенести графік f на вектор $(0; b)$ уздовж осі ординат.

2) *розтягування уздовж осі Oy з коефіцієнтом k .*

Для побудови графіка функції $y = kf(x)$ треба розтягти графік функції $y = f(x)$ у k раз уздовж осі ординат.

З а у в а ж е н н я . Якщо $0 < |k| < 1$, то розтягання з коефіцієнтом k часто називають стиском. Наприклад, розтягання з коефіцієнтом $\frac{1}{2}$ називають стиском у 2 рази. Відзначимо також, що якщо $k < 0$, то для побудови графіка функції $y = kf(x)$ треба спочатку розтягти графіка f у $|k|$ раз, а потім відбити його симетрично щодо осі абсцис

3) *Паралельний перенос уздовж осі абсцис на вектор $(a; 0)$.*

Графік функції $y = f(x - a)$ виходить із графіка f переносом (уздовж осі абсцис) на вектор $(a; 0)$.

4) *Розтягнення уздовж осі Ox з коефіцієнтом k*

Для побудови графіка функції $y = f\left(\frac{x}{k}\right)$ треба піддати графік функції f розтягненню з коефіцієнтом k уздовж осі абсцис.

Рекомендована література:

1. Алгебра і початки аналізу: В 2-х ч./ За ред. Г.М. Яковлева –2-е вид. –К.: Вища шк.. Головне вид-во, 1984. – Ч.1. с.102-114.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.:А.С.К., 2001, с.131-149.
3. Васильченко І.П. Вища математика для економістів: Підручник. – К.: Знання-Прес, 2002, с.177-185.

Завдання для виконання:

Розв'яжіть завдання з підручника

Алгебра і початки аналізу: В 2-х ч./ За ред. Г.М. Яковлева –2-е вид. –К.: Вища шк.. Головне вид-во, 1984. – Ч.1.

с.112 №4.1, 4.2, 4.3, 4.6 (а, б), 4.7 (а, в, е), 4.9.

Приклади розв'язування вправ.

Приклад 1. Знайти область визначення функцій:

$$1) y = \log_2(\sqrt{x} - 5);$$

$$2) y = \log_{11}(-x^2 + 5x) + \frac{1}{\arccos(x-1)};$$

$$3) y = \frac{1}{\sqrt{x-5}} + \arcsin(5x-1).$$

Розв'язання.

1. Скориставшись властивостями степеневі $\left(p = \frac{1}{2}\right)$ та логарифмічної функцій, дістанемо (рис. 2):

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} - 5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x > 25 \end{cases}$$

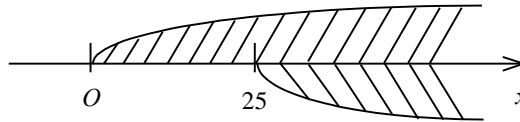


Рис. 2

Отже, $x \in (25; +\infty)$.

2. Згідно з властивостями логарифмічної та оберненої тригонометричної функцій маємо (рис. 3):

$$\begin{cases} -x^2 + 5x > 0 \\ \arccos(x-1) \neq 0 \\ -1 \leq x-1 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-5) < 0 \\ x-1 \neq 1 \\ -1+1 \leq x < 1+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-5) < 0 \\ x \neq 2 \\ 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

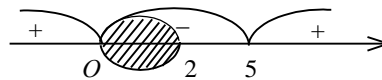


Рис. 3

Отже, $x \in [0; 2)$.

3. Із тих самих міркувань, що й у попередніх прикладах, записуємо (рис. 4):

$$\begin{cases} x-5 > 0 \\ -1 \leq 5x-1 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 5 \\ 0 \leq 5x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 5 \\ 0 \leq x \leq \frac{2}{5} \end{cases}$$

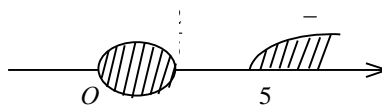


Рис. 4

Отже, $x \in \{\emptyset\}$.

Приклад 2. Попит і ціна — взаємозалежні величини. За певних умов попит на деякий товар є **функцією ціни**. Нехай q — попит на товар, p — ціна товару. Залежність між попитом і ціною називають **функцією попиту** $q = f(p)$. Функції попиту можуть бути найрізноманітнішими, скажімо

$$q = \frac{400}{p+3}; \quad q = ae^{-2p},$$

де $a = \text{const}$.

Приклад 3. Залежність між ціною і попитом можна розглядати як **функцію ціни від попиту** $p = \varphi(q)$. Це може бути залежність

$$p = \ln \sqrt{\frac{5}{q}}.$$

Приклад 4. Нехай відома функція ціни p від попиту q . Якщо реалізовано q одиниць певного товару, то добуток qp (кількості одиниць товару на його ціну) є сумарний виторг, або, як його ще називають, **функція сумарного виторгу**: $u = qp = q\varphi(q)$. Наприклад, якщо залежність ціни від попиту подається у вигляді $p = \frac{400}{q+4}$, то функція сумарного виторгу буде така:

$$u = \frac{400q}{(q+4)}.$$

Приклад 5. Відомо, що пропозиція деякого товару залежить від його ціни. Якщо через p позначити ціну, а через S — пропозицію, то функція $S = f(p)$ називається **функцією пропозиції**. Навпаки, кожній пропозиції S відповідає певна ціна. Тоді залежність $p = q(S)$ є **функцією ціни від пропозиції**.

Приклад 6. Функція, яка описує залежність між витратами на виробництво певного товару та виробленою його кількістю, тобто обсягом виробництва, називається **функцією витрат**. Якщо через K позначити сумарні витрати з виробництва x одиниць товару, то **функцію сумарних витрат** можна записати у вигляді $K = f(x)$.

Функція $\Pi = \frac{K}{x} = \frac{f(x)}{x}$ називається **функцією середніх витрат**.

Приклад 7. Побудуємо графіки функцій: а) $y = \sin x + 2$; б) $y = -2x^2$, в) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, г) $y = \sin \frac{1}{3}x$.

а) Відповідно до правила переносимо графік функції $y = \sin x$ на вектор $(0; 2)$, тобто нагору по осі Oy на 2 одиниці (рис. 5).

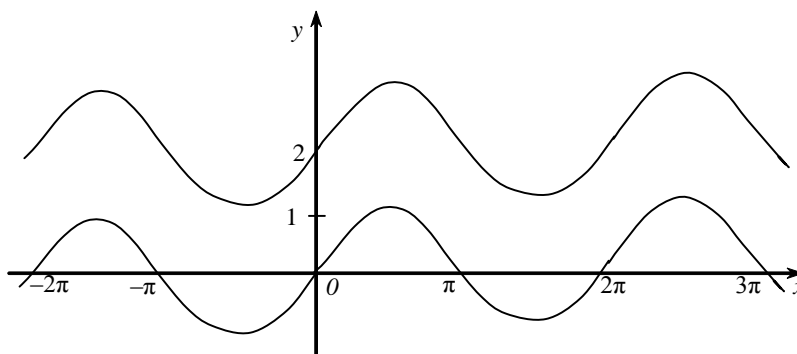


Рис. 5

б) Побудова здійснюється з графіка функції $y = x^2$ (рис. 6), потім скористаємося стисканням уздовж осі ординат в двічі.

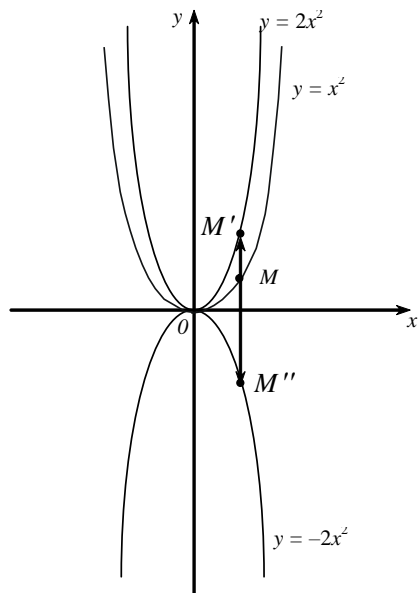


Рис. 6

в) Побудова графіка функції $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, як показано на рис.7.

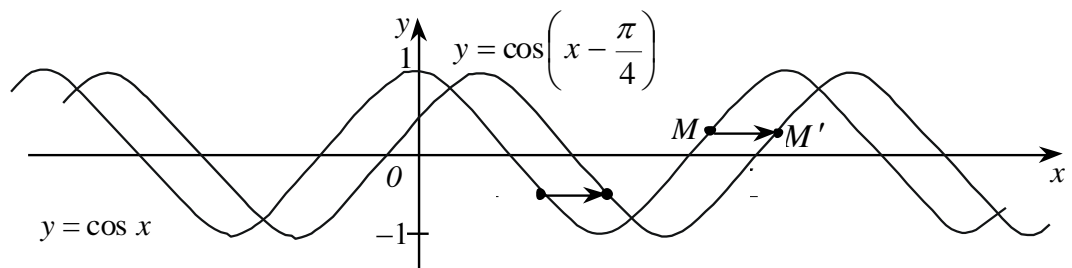


Рис. 7

г) Побудова графіка функції $y = \sin \frac{1}{3}x$ показано на рис.8.

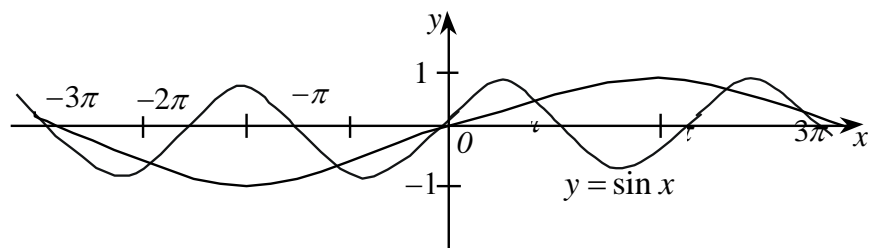


Рис. 8



Питання для самоконтролю:

- Що називається функцією? Як позначають функції?
- Наведіть приклади елементарних функцій.
- Що таке область визначення функції?
- Що називається областю значень функції? Наведіть приклади.
- Які існують способи задання функцій?
- Які властивості функцій ви знаєте?
- Дайте означення функції багатьох змінних.
- Які геометричні перетворення графіків функції ви знаєте?
- Які функції зустрічаються в економіці?
- Що таке ціна рівноваги?