Самостійна робота №6.

Тема: Обчислення границь функції. Дослідження функцій на неперервність. (2год.)

Методичні рекомендації:

Опрацювати рекомендовану літературу за планом:

1. Обчислення границь функції.
2. Дослідження функції на неперервність. Визначення точок розриву функції та встановлення їх типу.

1. Обчислення границь функції.

Число A називається ***границею функції*** $f(x)$ при $x \to a$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ можна вказати таке $\delta > 0$, що для будь-якого x, яке задовольняє нерівність $0 < |x - a| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. У цьому випадку пишуть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Якщо число A_1 (A_2) є границя функції $y = f(x)$ при x яке прямує до a так, що x набуває тільки значень, менших (більших) від a, то A_1 (A_2) називається ***лівою (правою) границею функції*** $f(x)$ в точці a. при цьому відповідно пишуть $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A_1$, $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A_2$.

Основні теореми про границі функції.

Теорема 1 (про єдність границі). Якщо функція $f(x)$ має границю при $x \to a$, то ця границя єдина.

Теорема 2. Якщо існують границі функцій $f(x)$ і $g(x)$ при $x \to a$, то існує також і границя їх суми, яка дорівнює сумі границь функцій $f(x)$ і $g(x)$:

$$\lim_{x \to a}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x \to a} f(x)+\lim_{x \to a} g(x)$$

Теорема 3. Якщо існують границі функцій $f(x)$ і $g(x)$ при $x \to a$, то існує також і границя їх добутку, яка дорівнює добутку границь функцій $f(x)$ і $g(x)$:

$$\lim_{x \to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim_{x \to a} f(x)\cdot\lim_{x \to a} g(x)$$

Теорема 4. Якщо існують границі функцій $f(x)$ і $g(x)$ при $x \to a$ і границя функції $g(x)$ відмінна від нуля, то існує також границя відношення $f(x)/g(x)$, яка дорівнює відношенню границь функцій $f(x)$ і $g(x)$:

$$\lim_{x \to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)},\quad \lim_{x \to a} g(x)\neq 0$$

Наслідки.

1) Сталий множник можна винести за знак границі $\lim\limits_{x \to a}(Cf(x))=C\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

2) Якщо n - натуральне число, то $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$, $\lim\limits_{x \to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}$.

3) Границя многочленна (цілої раціонально функції)

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

при $x \to a$ дорівнює значенню цього многочлена при $x=a$, тобто $\lim\limits_{x \to a} P(x)=P(a)$.

4) Границя дробово-раціональної функції

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}$$

при $x \to a$ дорівнює значенню цієї функції при $x=a$, якщо a належить області визначення функції, тобто $\lim\limits_{x \to a} R(x)=R(a)$.

Нескінченно малі і нескінченно великі функції.

Функція $f(x)$ називається ***нескінченно малою*** при $x \to a$, якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Функція $f(x)$ називається ***нескінченно великою*** при $x \to a$, якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, або $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, або $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Властивості нескінченно малих і нескінченно великих функцій.

1) Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ – нескінченно малі при $x \to a$, то їхня сума також є нескінченно малою функцією при $x \to a$.

2) Якщо функція $f(x)$ – нескінченно мала при $x \to a$, а $F(x)$ – обмежена функція, то їх добуток $f(x) \cdot F(x)$ – є функція нескінченно мала.

3) Добуток скінченного числа нескінченно малих функцій є величина нескінченно мала.

4) Якщо при $x \to a$ функція $f(x)$ має скінченну границю $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, а функція $g(x)$ – нескінченно велика, то

$$\lim_{x \to a} \left(f(x) + g(x) \right) = \infty, \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

5) Якщо при $x \to a$ функція $f(x)$ нескінченно мала, то функція $\frac{1}{f(x)}$ – нескінченно велика, причому припускається, що в околі точки а функція $f(x)$ не перетворюється в нуль. Навпаки, якщо при $x \to a$ функція $f(x)$ нескінченно велика, то функція $\frac{1}{f(x)}$ – нескінченно мала.

6) Якщо функція $f(x)$ має скінченну границю при $x \to a$, то її можна подати у вигляді суми сталої і нескінченно малої функції при $x \to a$. Навпаки, якщо функція $f(x)$ може бути подана у вигляді суми сталої і нескінченно малої функції при $x \to a$, то ця функція має скінченну границю при $x \to a$, і ця границя дорівнює значенню сталої.

2. Дослідження функції на неперервність. Визначення точок розриву функції та встановлення їх типу.

Функція $f(x)$ називається ***неперервною в точці*** $x = a$, якщо границя функції при $x \to a$ дорівнює значенню функції в точці *a*:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Функція $f(x)$ називається ***неперервною в точці*** $x = a$, якщо вона в цій точці означена і нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції, тобто $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Якщо умова неперервності функції в точці $x = a$ порушена, то таку точку називають ***точкою розриву функції***.

Функція називається ***неперервною на проміжку***, якщо вона неперервна в усіх точках цього проміжку.

Якщо функція $y = f(x)$ при $x = a$ має розрив, то щоб з'ясувати характер розриву, треба знайти границю функції $f(x)$ при $x \to a$ зліва і справа.

Залежно від характеру поводження функції в околі точки розриву розрізняють два основні види розривів:

1) ***розрив І роду*** – у цьому випадку існують скінченні лівостороння і правостороння границі функції $f(x)$.

2) ***розрив ІІ роду*** – у цьому випадку хоча б одна з односторонніх границь не існує або нескінченна.

Рекомендована література:

1. Алгебра і початки аналізу: В 2-х ч./ За ред. Г.М. Яковлєва –2-е вид. –К.: Вища шк.. Головне вид-во, 1984. – Ч.1. с.139-154.

2. Богомолов М.В. Практичні заняття з математики: Навч. посібник для технікумів, – К.: Вища школа. Головне вид-во, 1979, с.53-68.

3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.:А.С.К., 2001, с.155-191.

4. Васильченко І.П. Вища математика для економістів: Підручник. – К.: Знання-Прес, 2002, с.195-216.

Завдання для виконання:

1. Знайдіть границі функцій згідно свого варіанту (№ варіанту – остання цифра порядкового номеру по журналу):

1) а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{4x^2-25x+25}{2x^2-15x+25}$ при: а) $x_0=2$, б) $x_0=5$, в) $x_0=\infty$.

б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{x+5}-\sqrt{3-x}}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 6x\,ctg\,2x$, г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-4}{n+5}\right)^{5n+3}$

2) а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{7x^2+26x-8}{2x^2+x-28}$ при: а) $x_0=1$, б) $x_0=-4$, в) $x_0=\infty$.

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{8-x}}{x-2}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,7x}{5x}$, г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-5}{2n+3}\right)^{4n+5}$

3) а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2+15x+25}{x^2+15x+50}$ при: а) $x_0=5$, б) $x_0=-5$, в) $x_0=\infty$.

б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x-2}-\sqrt{6-x}}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,5x}{tg\,4x}$, г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-1}{3n+6}\right)^{2n+3}$

4) а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2+5x-8}{2x^2+3x-5}$ при: а) $x_0=-2$, б) $x_0=1$, в) $x_0=\infty$.

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}{x-3}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{cin\,3x}{tg\,2x}$, г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n-3}{5n+4}\right)^{n+1}$

5) а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{6x^2+13x+7}{3x^2+8x+5}$ при: а) $x_0=-2$, б) $x_0=-1$, в) $x_0=\infty$.

б) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x-3}-\sqrt{9-x}}{x-6}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 8x}{4x}$, г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n+1}{4n-3}\right)^{5n-1}$

6) а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2-4x-7}{4x^2+x-3}$ при: а) $x_0=2$, б) $x_0=-1$, в) $x_0=\infty$.

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{5-x}}{x-3}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,7x}{5x}$, г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n-6}\right)^{3n+3}$

7) а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-8x-20}{2x^2+3x-2}$ при: а) $x_0=-1$, б) $x_0=-2$, в) $x_0=\infty$.

б) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{\sqrt{x+2}-\sqrt{18-x}}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{5x}$, г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-8}{2n+7}\right)^{7n+12}$

8) а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{4x^2-10x-6}{x^2-10x+21}$ при: а) $x_0=-2$, б) $x_0=3$, в) $x_0=\infty$.

б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+7}-\sqrt{21-x}}{x-7}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$, г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-4}{2n+10}\right)^{3n+8}$

9) а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2+20x+17}{x^2-14x-15}$ при: а) $x_0=-3$, б) $x_0=-1$, в) $x_0=\infty$.

б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{16-x}-\sqrt{8+x}}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 17x}{18x}$, г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n+8}{4n-17}\right)^{3n-7}$

10) а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-14x+13}{2x^2-17x+15}$ при: а) $x_0=2$, б) $x_0=1$, в) $x_0=\infty$.

б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+15}-\sqrt{9-x}}{x+3}$, в) $\lim\limits_{x\to 0} ctg\,4x tg\,7x$, г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-8}{n+9}\right)^{2n+11}$

2. Дослідіть функції $y=\dfrac{5}{x^2-25}$, $y=\dfrac{x^2}{x+3}$ *на неперервність: а) в точках x=2, x=-1, x=-5; б) на всій числовій прямій..*

Приклади розв'язування вправ:

Приклад 1. Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+5x+6}$ при: а) $x_0=3$, б) $x_0=-3$, в) $x_0=\infty$.

Розв'язання.

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+5x+6}$.

За теоремою про границю частки дістанемо

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2+5x-3}{x^2+5x+6}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}(2x^2+5x-3)}{\lim\limits_{x\to 3}(x^2+5x+6)}=\frac{2\cdot 3^2+5\cdot 3-3}{3^2+5\cdot 3+6}=\frac{18+15-3}{9+15+6}=\frac{30}{30}=1.$$

б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+5x+6}$.

Тут теорему про границю частки застосувати не можна, тому що $\lim\limits_{x\to -3}(2x^2+5x-3)=0$.

Крім того, $\lim\limits_{x\to -3}(x^2+5x+6)=0$, тобто маємо невизначеність виду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Розкладемо чисельник і знаменник на множники:

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3),\quad 2x^2+5x-3=2(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right).$$

Оскільки при знаходженні границі функцій в точці *x*=-3 розглядаються значення $x\neq -3$, то даний дріб можна скоротити на (*x*+3), тому

$$\lim_{x\to -3}\frac{2x^2+5x-3}{x^2+5x+6}=\lim_{x\to -3}\frac{2(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(x+3)(x+2)}=\lim_{x\to -3}\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(x+2)}=\frac{2\left(-3-\frac{1}{2}\right)}{-3+2}=\frac{2\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)}{-1}=7$$

.

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x-3}{x^2+5x+6}$.

При застосуванні теореми про границю частки отримаємо невизначеність виду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Для обчислення границі цієї функції чисельник і знаменник поділимо на x^2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x-3}{x^2+5x+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}-\frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}+\frac{6}{x^x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}{1+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^x}}=\frac{2}{1}=2$$

2) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{9-x}}{x-5}$

При застосуванні теореми про границю частки отримаємо невизначеність виду $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для обчислення границі цієї функції чисельник і знаменник помножимо на вираз спряжений до чисельника. Отримаємо:

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{9-x}}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{(\sqrt{x-1}-\sqrt{9-x})(\sqrt{x-1}+\sqrt{9-x})}{(x-5)(\sqrt{x-1}+\sqrt{9-x})}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{x-1-(9-x)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+\sqrt{9-x})}=\lim_{x\to 5}\frac{2(x-5)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+\sqrt{9-x})}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{2}{\sqrt{x-1}+\sqrt{9-x}}=\frac{2}{\sqrt{2-1}+\sqrt{9-2}}=\frac{2}{2+2}=0{,}5.$$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ctg\,3x}{ctg\,5x}$

Для обчислення границі цієї функції використаємо одну з основних формул тригонометрії $ctgx=\dfrac{\cos x}{\sin x}$, а також першу важливу границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Маємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{ctg\,3x}{ctg\,5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\cos 3x}{\sin 3x}}{\dfrac{\cos 5x}{\sin 5x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x}{\cos 5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x}{\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 5x}{5x}}{\dfrac{\sin 3x}{3x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{5x}{3x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{5}{3}=\frac{1}{1}\cdot\frac{5}{3}=\frac{5}{3}.$$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-6}{n-4}\right)^{4n+2}$

Виконавши перетворення і використавши формулу $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=e$, знаходимо:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-6}{n-4}\right)^{4n+2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-4-2}{n-4}\right)^{4n+2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\dfrac{n-4}{-2}}\right)^{\frac{n-4}{-2}\cdot\frac{-2}{n-4}\cdot(4n+2)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\dfrac{n-4}{-2}}\right)^{\frac{n-4}{-2}}\right)^{\frac{-2}{n-4}\cdot(4n+2)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2}{n-4}\cdot(4n+2)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-8n-4}{n-4}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-8-\frac{4}{n}}{1-\frac{4}{n}}}=e^{-8}$$

Приклад 2. Дослідити функцію $y=\frac{x^3}{(x-2)^2}$ на неперервність на всій числовій прямій.

Розв'язання.

Знайдемо область визначення функції. Дана функція є дробово-раціональною. Вона визначена у всіх точках числової осі, крім тих, які обертають знаменник в нуль. Отже, $x\neq 2$, тобто $x\in(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$.

В області визначення дана функція є неперервною. В точці x=2 функція не визначена. З'ясуємо поведінку функції в околі точки x=2:

$$\begin{aligned} f(2-0)&=\lim_{x\to 2-0}\frac{x^3}{(x-2)^2}=+\infty \\ f(2+0)&=\lim_{x\to 2+0}\frac{x^3}{(x-2)^2}=+\infty \end{aligned}.$$

Отже в точці x=2 функція має розрив другого роду.

Питання для самоконтролю:

- Що таке окіл точки x_0? Поясніть його геометричний зміст.
- Дайте означення границі функції в точці.
- У чому полягає геометричний зміст границі функції в точці?
- Які функції називаються нескінченно великими, нескінченно малими?
- Сформулюйте властивості нескінченно малих і нескінченно великих функцій.

- Поясніть зміст поняття границі функції $f(x)$, при $x \to x_0$. Як ви розумієте висловлення "$x \to a$"?
- Які основні теореми про границі функцій ви знаєте?
- Дайте означення неперервності функції в точці.
- Що таке точки розриву?
- Як дослідити функцію на неперервність на відрізку?