Самостійна робота №7.

Тема: Обчислення похідних функцій. Правило Лопіталя. (2год.)

Методичні рекомендації:

Опрацювати рекомендовану літературу за планом:

1. Обчислення похідних функцій на основі теорем.
2. Обчислення границь функцій за правилом Лопіталя.

1. Обчислення похідних функцій на основі теорем.

Означення. Нехай функція f визначена в деякому околі точки x_0 і нехай Δf – приріст функції f у точці x_0, що відповідає приросту Δx незалежної змінної x.

Якщо відношення $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ має границю при $\Delta x \to 0$, то ця границя називається *похідною функції f в точці x_0* і позначається $f'(x_0)$ (читається "f штрих від x_0").

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Геометричний зміст похідної.

Похідна в точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції $y=f(x)$ у цій точці. (див. рис. 1)

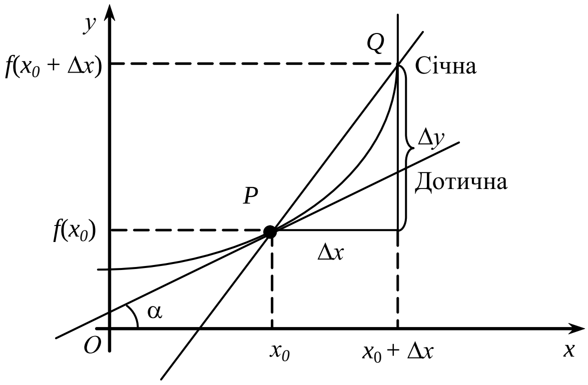

Рис. 1. Геометричний зміст похідної

Механічний (фізичний) зміст похідної.

Якщо точка рухається вздовж осі x і її координата змінюється за законом $x(t)$, то миттєва швидкість точки дорівнює похідній від переміщення:

$$\upsilon(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = x'(t).$$

Правила диференціювання функцій.

Позначимо $u(x_0) = u, \quad v(x_0) = v, \quad u'(x_0) = u', \quad v'(x_0) = v'$.

Правило 1. Якщо функції u і v диференційовані в точці x_0 , то їх сума (різниця) диференційована в цій точці і

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

Коротко. *Похідна суми (різниці) дорівнює сумі (різниці) похідних.*

Правило 2. Якщо функції u і v диференційовані в точці x_0 , то їхній добуток диференційований у цій точці і

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Наслідок. Якщо функція u диференційована в точці x_0 , то функція Cu диференційована в цій точці і

$$(Cu)' = Cu'.$$

Коротко. *Сталий множник можна виносити за знак похідної.*

Правило 3. Якщо функції u і v диференційовані в точці x_0 і функція $v \neq 0$ в цій точці , то їх частка $\frac{u}{v}$ також диференційована в точці x_0 і

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Правило 4 (Похідна складеної функції).

Якщо функція $f(x)$ диференційована в точці x_0 і функція g - похідну в точці $y_0 = f(x_0)$, то складена функція $h(x) = g(f(x))$ також має похідну в точці x_0, причому

$$h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Похідна оберненої функції.

Похідна оберненої функції знаходиться за формулою

$$x_y' = \frac{1}{y_x'}.$$

Похідна функції заданої неявно.

Якщо функція $y = f(x)$ задана рівнянням $F(x, y) = 0$, не розв’язним відносно у, то вона називається заданою неявно і її похідна знаходиться за формулою

$$y_x' = -\frac{F_x'}{F_y'}.$$

Похідна функції заданої параметрично.

Якщо функція $y = f(x)$ задана параметрично рівняннями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, тоді її похідна знаходиться за формулою

$$y_x' = -\frac{y_t'}{x_t'},$$ де t - параметр.

Таблиця похідних.

1. $C'=0$
2. $x'=1$
3. $\left(u^n\right)' = nu^{n-1}u'$
4. $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
5. $\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$
6. $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$
7. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
8. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$
9. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
10. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
11. $(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
12. $(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
13. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
14. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
15. $(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
16. $(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

де u диференційована функція від x, а C – стала.

2. Обчислення границь функцій за правилом Лопіталя.

Правило Лопіталя використовується для розкриття невизначеностей виду $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, які виникають при обчислені границь функцій.

Правило Лопіталя. Нехай в околі точки *a* задано неперервні диференційовані функції *f(x), φ(x)*. Причому *f(a)=φ(a)=0*. Тоді в разі існування границі відношення похідних цих функцій при $x \to a$ існує і границя відношення самих функцій при $x \to a$:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

Зауваження 1. Правило Лопіталя можна застосувати кількаразово, якщо для відповідної функції або похідної виконуються умови теореми Коші.

Зауваження 2. Функції *f(x), φ(x),* які є неперервними і диференційованими в околі точки *x=a*, у самій точці *a* можуть бути не визначеними. Але якщо існують границі $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ то можна застосувати правило Лопіталя до відношення $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$.

Якщо функції *f(x)* і *φ(x)* невизначені в точці *x=a*, то визначаємо значення функцій *f(x)* і *φ(x)* та їх граничні значення при $x \to a$: $f(a)=\lim\limits_{x\to a} f(x)=0,\ \varphi(a)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$. Це можна зробити, оскільки ми розглядаємо границю відношення функцій, припускаючи, що в околі точки а виконується умова теореми Коші.

Теорема 2. Нехай функції *f(x)* і *φ(x)* неперервні і диференційовані на півпрямій $c < x < +\infty$ $(-\infty < x < c)$, причому φ(x) на цій півпрямій не перетворюється на нуль і водночас виконуються рівності: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=0$

Тоді, якщо існує $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то існує і $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ та справджується рівність

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

Рекомендована література:

1. Бубняк Т.І. Вища математика: Навчальний посібник. – Львів: "Новий світ–2000",2004, с.85-98.

2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.:А.С.К., 2001, с.191-218.

3. Пастушенко С.М., Підченко Ю.П. Вища математика. Довідник для студентів вищих навч.закладів: Навч. посібник. 2-е вид., виправлене і доповн. -К.: Діал.,2003, с.169-176.

Завдання для виконання:

1. Знайдіть похідні заданих функцій (№ варіанту –порядковий номер по журналу):

1. *а)* $y=2\sin x+xe^x$ *б)* $y=\frac{1+3x^2}{2x+1}$ *в)* $y=\left(3x^4-\frac{5}{\sqrt[4]{x}}+2e^x\right)^5$

2. *а)* $y=x\ln x+3e^x$ *б)* $y=\frac{1-x^2}{4x+1}$ *в)* $y=\left(\sin^2 x+2\right)^8$

3. *а)* $y=2tgx-x\cos x$ *б)* $y=\frac{1+8x^2}{5x+2}$ *в)* $y=\sin\sqrt{1-\ln x}$

4. *а)* $y=x^7+x^3e^x$ *б)* $y=\frac{1+7x^3}{x-1}$ *в)* $y=e^{\sin 2x}$

5. *а)* $y=2arctgx-(\sin x+1)x$ *б)* $y=\frac{1-4x^5}{3x+4}$ *в)* $y=\sqrt[3]{1-\ln 3x}$

6. $a)\ y=3\arcsin x-(x+1)e^{x}$ $б)\ y=\dfrac{8x^5-5x^4}{4x+2}$ $в)\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2-\sin 2x}}$

7. $a)\ y=x^3\ln x-3arctgx$ $б)\ y=\dfrac{x^4-4x^5}{3x+2}$ $в)\ y=\ln\left(1-\sqrt{\sin x}\right)$

8. $a)\ y=x^2(1-7x)^{10}+3\ln(x+1)$ $б)\ y=\dfrac{1-x^5}{3-2x}$ $в)\ y=\left(\sin\sqrt{x}\right)^8$

9. $a)\ y=\dfrac{4}{x^2}+(x^2-5)\cos x$ $б)\ y=\dfrac{-2x+6x^2}{6x+1}$ $в)\ y=\sqrt[5]{tg(4x)}$

10. $a)\ y=\dfrac{3x+2+x\ln x}{5}$ $б)\ y=\dfrac{3x-x^3}{x+4}$ $в)\ y=\sin^6\left(1-\sqrt{x}\right)$

11. $a)\ y=\dfrac{3\sin x-4\sqrt{x}+x\ln x}{3}$ $б)\ y=\dfrac{4x-x^2}{x+5}$ $в)\ y=\cos^5\left(1-\sqrt{x}\right)$

12. $a)\ y=x\sin x-5\arccos x$ $б)\ y=\dfrac{3+6x^3}{x^4-2}$ $в)\ y=\ln\left(1-\sqrt{e^{2x}+1}\right)$

13. $a)\ y=\dfrac{4}{x^2}-x\arcsin x$ $б)\ y=\dfrac{5+3x^4}{1-x^6}$ $в)\ y=\sqrt[5]{1-\ln 6x}$

14. $a)\ y=\dfrac{1}{x^6}-7x\ln x$ $б)\ y=\dfrac{7-4x^2}{8x-1}$ $в)\ y=\sqrt{tg\left(2x^2+1\right)}$

15. $a)\ y=\dfrac{3x^2+7}{4}-5xe^{x}$ $б)\ y=\dfrac{2+4x^3}{2x+5}$ $в)\ y=\sin^2(1-2x)$

16. $a)\ y=\dfrac{2+x^3-x^4\sin x}{4}$ $б)\ y=\dfrac{1-6x}{3x^2+1}$ $в)\ y=\sqrt{\arcsin\left(x^2+1\right)}$

17. $a)\ y=\dfrac{1}{5}\left(x^3-\dfrac{1}{\sqrt{x}}+x\cos x\right)$ $б)\ y=\dfrac{3+9x^2}{x^2+1}$ $в)\ y=\dfrac{1}{\sqrt{\ln(2x+3)}}$

18. $a)\ y=2\sqrt[3]{x}-3+x^2e^{x}$ $б)\ y=\dfrac{1-4x^4}{3+x^3}$ $в)\ y=\dfrac{10}{\sin^2(4x)}$

19. $a)\ y=x^4\cos x-5xe^{x}$ $б)\ y=\dfrac{3-4x^3}{2x+5}$ $в)\ y=4e^{2\sin\sqrt{x}}$

20. $a)\ y=3\sin 4x-\dfrac{1}{4x^2}+xe^{x}$ $б)\ y=\dfrac{1-7x^6}{8x+3}$ $в)\ y=\sqrt[4]{tg(2x)}$

21. $a)\ y=x\arccos x-\dfrac{1}{x^5}+7$ $б)\ y=\dfrac{4+6x}{3-x^3}$ $в)\ y=\sqrt{1-\ln 4x}$

22. $a)\quad y=\frac{1}{7}\left(x^4-\frac{1}{3\sqrt{x}}+2^x\cos x\right)\qquad б)\, y=\frac{3+6x^2}{x^2+4}\qquad в)\ y=\frac{1}{\sqrt{\sin(2x+3)}}$

23. $a)\quad y=2\sqrt[4]{x}-3x+x^3e^x\qquad б)\, y=\frac{1-4x^3}{2+x^2}\qquad в)\ y=\frac{5}{\cos^2(4x)}$

24. $a)\quad y=x^3\cos x-7xe^x\qquad б)\, y=\frac{5-4x^3}{3x+5}\qquad в)\ y=4e^{2\cos\sqrt{x}}$

25. $a)\quad y=5x\cos x-x\arcsin x\qquad б)\, y=\frac{1-4x^3}{x^3-2}\qquad в)\ y=\ln\left(1-\sqrt{e^{3x}+2}\right)$

26. $a)\quad y=\frac{4}{x^3}-x^2\arcsin x\qquad б)\, y=\frac{4-3x^5}{1-x^6}\qquad в)\ y=\sqrt[4]{1-\ln(x+9)}$

27. $a)\quad y=\frac{15}{x^5}-7x\ln^2 x\qquad б)\, y=\frac{5-3x^2}{9x-4}\qquad в)\ y=\sqrt{ctg\left(2x^2+1\right)}$

28. $a)\quad y=\frac{2x^3+7x}{3}-6x^2e^x\qquad б)\, y=\frac{1+4x^3}{2x+8}\qquad в)\ y=tg^2(1-3x)$

29. $a)\quad y=3\arccos x-(2x+1)e^x\qquad б)\, y=\frac{4x^3-3x^4}{6x+2}\qquad в)\ y=\frac{1}{\sqrt{4-\cos 2x}}$

30. $a)\quad y=x^4\ln x-4arcctgx\qquad б)\, y=\frac{x^3-2x^5}{5x+2}\qquad в)\ y=\ln^2\left(1-\sqrt{tgx}\right)$

2. Обчисліть границі функції користуючись правилом Лопіталя

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{6x^2+13x+7}{3x^2+8x+5}$ при: а) $x_0=-1,$ $б)\ x_0=\infty.$

б) $\lim\limits_{x\to 6}\frac{\sqrt{x-3}-\sqrt{9-x}}{x-6}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 8x}{4x}$.

Приклади розв'язування вправ:

Приклад 1. Знайти похідні заданих функцій:

1) $y=\left(3x^4-\frac{4}{\sqrt[4]{x}}-3\right)^5$

Використовуючи правила знаходження похідної складеної функції та похідної суми функцій, а також таблицю похідних знаходимо:

$$y' = \left(\left(3x^4 - \frac{4}{\sqrt[4]{x}} - 3\right)^5\right)' = 5\cdot\left(3x^4 - \frac{4}{\sqrt[4]{x}} - 3\right)^4\cdot\left(3x^4 - \frac{4}{\sqrt[4]{x}} - 3\right)' =$$

$$= 5\cdot\left(3x^4 - \frac{4}{\sqrt[4]{x}} - 3\right)^4\cdot\left(12x^3 - 4\cdot\left(-\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{4}-1}\right) + 0\right) = 5\cdot\left(3x^4 - \frac{4}{\sqrt[4]{x}} - 3\right)^4\cdot\left(12x^3 + x^{-\frac{5}{4}}\right) =$$

$$= 5\cdot\left(3x^4 - \frac{4}{\sqrt[4]{x}} - 3\right)^4\cdot\left(12x^3 + \frac{1}{x\sqrt[4]{x}}\right)$$

2) $\quad y = \ln\sqrt{\left(\frac{x^6-3}{6x+2}\right)^3}$

Використовуючи правила знаходження похідної складеної функції та похідної частки функцій, а також таблицю похідних знаходимо:

$$y' = \left(\ln\sqrt{\left(\frac{x^6-3}{6x+2}\right)^3}\right)' = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x^6-3}{6x+2}\right)^3}}\cdot\left(\left(\frac{x^6-3}{6x+2}\right)^3\right)' = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x^6-3}{6x+2}\right)^3}}\cdot 3\cdot\left(\frac{x^6-3}{6x+2}\right)^2\cdot\left(\frac{x^6-3}{6x+2}\right)' =$$

$$= 3\cdot\sqrt{\left(\frac{x^6-3}{6x+2}\right)}\cdot\frac{\left(x^6-3\right)'\cdot(6x+2)-\left(x^6-3\right)\cdot(6x+2)'}{(6x+2)^2} = 3\cdot\sqrt{\left(\frac{x^6-3}{6x+2}\right)}\cdot\frac{6x^5\cdot(6x+2)-\left(x^6-3\right)\cdot 6'}{(6x+2)^2} =$$

$$= 18\cdot\sqrt{\left(\frac{x^6-3}{6x+2}\right)}\cdot\frac{6x^6+2x^5-x^6+3'}{(6x+2)^2} = 18\cdot\sqrt{\left(\frac{x^6-3}{6x+2}\right)}\cdot\frac{5x^6+2x^5+3'}{(6x+2)^2}$$

3) $y = arctg\,\frac{1}{x-1}$.

Використовуючи правила знаходження похідної складеної функції та похідної частки функцій, а також таблицю похідних дістанемо:

$$y' = \left(arctg\frac{1}{x-1}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x-1}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{x-1}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x-1}\right)^2}\cdot\frac{(1)^1\cdot(x-1)-1\cdot(x-1)'}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2+1}\cdot\frac{-1}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(x-1)^2+1}$$

4) $y = xtg3x + 2^{x-2}$

Використовуючи правила диференціювання функції та таблицю похідних дістанемо:

$$y' = \left(xtg3x + 2^{x-2}\right)' = (x)'\cdot tg3x + x\cdot(tg3x)' + 2^{x-2}\cdot\ln 2\cdot(x-2)' = tg3x + \frac{3x}{\cos^2 3x} + 2^{x-2}\cdot\ln 2$$

Приклад 2. *Обчислити границі функції, користуючись правилом Лопіталя.*

а) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1})$

Розв'язання.

Маємо невизначеність виду $[\infty-\infty]$. Спочатку перетворимо її до невизначеності виду $\left[\frac{0}{0}\right]$, для чого приведемо дроби до спільного знаменника. До отриманого виразу двічі застосуємо правило Лопіталя. Маємо:

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}) = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1-x)'}{(x(e^x-1))'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{xe^x-1+e^x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(xe^x-1+e^x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{xe^x+e^x+e^x} = \frac{1}{2}.$$

б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Розв'язання.

Розкриваючи невизначеність виду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ за правилом Лопіталя, одержуємо:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1/(2\sqrt{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0.$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{1/x}$.

Розв'язання.

Маємо невизначеність виду $\left[1^\infty\right]$. Позначимо шукану границю через A.

A=$\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{1/x}$.

Тоді lnA=$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}\ln(e^x+x))=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+1}{e^x+x}$=2 $\Rightarrow$ A=e^2.

Питання для самоконтролю:

- Що таке приріст функції та приріст аргументу?
- Дайте означення похідної функції?
- В чому полягає геометричний і механічний зміст похідної функції?
- Як знайти похідну функції за означенням?
- Таблиця найпростіших похідних.
- Сформулюйте правила диференціювання суми, різниці, добутку і частки функцій.
- Сформулюйте правило знаходження похідної складеної функції.
- Як знайти похідні оберненої та заданої неявно функцій?
- Як формулюється правило Лопіталя?
- Які границі можна обчислювати користуючись правилом Лопіталя?