Самостійна робота №8.

Тема: Застосування диференціалу в наближених обчисленнях. (2год.)

Методичні рекомендації:

Опрацювати рекомендовану літературу за планом:

1. Диференціал функції, його властивості.
2. Застосування диференціалу до наближених обчислень.

1. Диференціал функції, його властивості.

Поняття диференціала тісно пов'язане з поняттям похідної, і є одним з найважливіших в математиці. Диференціал наближено дорівнює приросту функції і пропорційний приросту аргументу. Внаслідок цього диференціал широко застосовується при дослідженні різноманітних процесів і явищ.

Термін "диференціал" (від лат. Differentia - різниця) ввів Лейбніц.

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в точці $x \in [a;b]$, т/б в цій точці має похідну $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.Тоді з властивості нескінченно малих

$\left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x), \right)$, $\quad де \quad \lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ маємо:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha, \quad \alpha \to 0 \quad при \quad \Delta x \to 0,$$

звідки $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x = f'(x)\Delta x$.

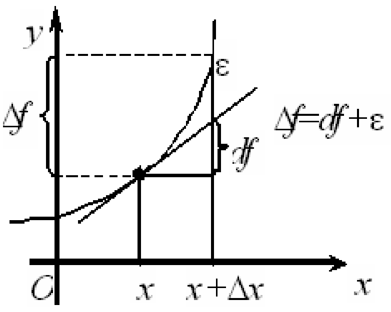

Рис. 1

Означення. *Диференціалом* dy *функції* $y = f(x)$ *в точці* x називається головна, лінійна відносно Δx, частина приросту функції $f(x)$ в цій точці: $dy = f'(x)\Delta x$. (диференціал 1-го порядку).

Якщо $y=x$, то $dy = dx = \Delta x$. Тому $dy = f'(x)dx$. Ця формула дає змогу розглядати похідну функції як відношення диференціала функції до диференціала незалежної змінної.

Геометричний зміст диференціала.

Диференціал – це приріст ординати точки, що рухається по дотичній до кривої. (див. рис 1).

Властивості диференціала.

$$d(Cu) = Cdu$$
$$d(u \pm v) = du \pm dv$$
$$d(uv) = vdu + udv$$
$$d\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

2. Застосування диференціалу до наближених обчислень.

Застосування диференціалу до наближених обчислень ґрунтується на тому, що $\Delta y \approx dy$ для малих значень приросту аргументу. Крім того, оскільки $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, то

$$f\left(x_0+\Delta x\right)\approx f(x_0)+dy.$$

Рекомендована література:

1. Богомолов М.В. Практичні заняття з математики: Навч. посібник для технікумів, – К.: Вища школа. Головне вид-во, 1979, с.176-186.

2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.:А.С.К., 2001, с.218-223.

3. Пастушенко С.М., Підченко Ю.П. Вища математика. Довідник для студентів вищих навч.закладів: Навч. посібник. 2-е вид., виправлене і доповн. -К.: Діал.,2003, с.186-188.

Завдання для виконання:

Розв'яжіть приклади згідно свого варіанту (№ варіанту – остання цифра порядкового номера по журналу):

1. Обчисліть наближене значення $\sqrt[n]{a}$, замінивши в точці $x=x_0$ приріст функції $y=\sqrt[n]{x}$ диференціалом.

1) n=3,	a=502,	x_0=512	6) n=3,	a=349,	x_0=343
2) n=4,	a=267,	x_0=256	7) n=4,	a=605,	x_0=625
3) n=5,	a=234,	x_0=243	8) n=5,	a=255,	x_0=243
4) n=6,	a=685,	x_0=729	9) n=6,	a=773,	x_0=729
5) n=7,	a=142,	x_0=128	10) n=7,	a=156,	x_0=128

2. Обчисліть наближено (Для логарифма $(\lg x)'=\frac{M}{x}\approx\frac{0,4343}{100}\approx 0.0043$)

1) $arctg\ 0,93$, $\sin 61^\circ$, $\lg 101$ 6) $\arccos 0,745$, $\cos 32^\circ$, $\lg 1003$

2) $\arcsin 0{,}707$, $\cos 46°$, $\lg 102$

3) $\arccos 0{,}45$, $ctg\,61°$, $\lg 99$

4) $arcctg\ 1{,}06$, $tg\,63°$, $\lg 1001$

5) $arctg\ 0{,}89$, $\cos 29°$, $\lg 12$

7) $arcctg\ 1{,}12$, $\sin 47°$, $\lg 98$

8) $\arccos 0{,}63$, $ctg\,46°$, $\lg 1011$

9) $\arcsin 0{,}47$, $tg\,28°$, $\lg 999$

10) $arcctg\,0{,}96$, $\sin 31°$, $\lg 105$

Приклади розв'язування вправ:

Приклад 1. Обчисліть наближено $arctg\ 1{,}05$.

Розв'язання.

Нехай $f(x) = arctg\ x$, тоді за формулою наближених обчислень маємо:

$$arctg\,(x_0 + \Delta x) \approx arctg\ x_0 + (arctg\ x)'\Delta x,$$

$$arctg\,(x_0 + \Delta x) \approx arctg\ x_0 + \frac{\Delta x}{1 + x^2}.$$

Якщо x=1, $\Delta x = 0{,}05$, то $arctg\,1{,}05 \approx arctg\,1 + \frac{0{,}05}{2} = \frac{\pi}{4} + 0{,}025 \approx 0{,}811$.

Приклад 2. Знайти наближене значення $\sqrt[10]{1030}$.

Розв'язання.

Виберемо функцію таку, щоб даний числовий вираз був значенням цієї функції для деякого значення аргументу.

Очевидно, що в цьому прикладі такою функцією є $y = \sqrt[10]{x}$. Тоді $\sqrt[10]{1030} = f(1030)$.

Знайдемо таке значення аргументу x_0, яке було б близьке до даного і для якого значення функції легко обчислюється. В даному прикладі візьмемо x_0=1024, оскільки

$$f(1024)=\sqrt[10]{1024}=2.$$

Тоді $x_0+\Delta x=1030$ і $\Delta x=6$.

За формулою наближених обчислень маємо:

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+dy$$

$$f(1030)\approx f(1024)+dy, \text{ де } dy=f'(x)\Delta x=\frac{1}{10\sqrt[10]{x^9}}\Delta x$$

Отже, $\sqrt[10]{1030}\approx\sqrt[10]{1024}+\frac{1}{10\sqrt[10]{1024^9}}\cdot 6\approx 2+\frac{6}{10\cdot 2^9}\approx 2+0{,}0012=2{,}0012.$

Питання для самоконтролю:

- Що називається диференціалом функції?
- Як визначається диференціал функції через похідну?
- Який геометричний та механічний зміст диференціала7
- Сформулюйте властивості диференціала.
- Обґрунтуйте формулу для наближеного обчислення значення функції за допомогою диференціала.