Самостійна робота №9.

Тема: Дослідження функції на екстремум та опуклість графіка кривої. (2год.)

Методичні рекомендації:

Опрацювати рекомендовану літературу за планом:

1. Дослідження функції на екстремуми за допомогою похідної функції.
2. Дослідження функції на опуклість графіка кривої.

1. Дослідження функції на екстремуми за допомогою похідної функції.

Нехай функція f(x) визначена на інтервалі (a,b).

Достатня умова зростання (спадання функції).

Означення. Функція *f(x)* називається *зростаючою* в деякому інтервалі, якщо в точках цього інтервалу більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції, і *спадною*, якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції.

Означення. Інтервали на яких функція тільки зростає або спадає, називаються інтервалами *монотонності* функції.

Теорема. Якщо похідна функції f(x) додатна (від'ємна) в деякому інтервалі, то функція в цьому інтервалі монотонно зростає (спадає).

Означення. Точку x_0 називають *точкою максимуму (мінімуму)* функції *f(x),* якщо існує δ-окіл точки δ x_0 , який міститься в проміжку (a,b), і такий, що для всіх значень x, взятих з δ-околу, виконується умова $f(x) < f(x_0)($

$f(x)>f(x_0)$). Точки максимуму і мінімуму називаються *екстремальними точками*, а сам максимум і мінімум *екстремумами функції*.

Необхідна умова існування точок екстремуму.

Теорема. Якщо функція f(x) у внутрішній точці x_0 проміжку (a,b) має екстремум, то в цій точці похідна f'(x), якщо вона існує, дорівнює нулю.

Означення. Точки в яких похідна функції дорівнює нулю називаються *стаціонарними* точками, а точки в яких похідна функції дорівнює нулю, або не існує називаються *критичними* точками функції.

Достатня умова існування точок екстремуму.

Теорема. Якщо похідна функції f'(x) при переході x через точку x_0 міняє знак, то точка x_0 є точкою екстремуму функції, причому, якщо похідна функції при переході через точку x_0 міняє знак з плюса на мінус, то x_0 є точкою максимуму функції, а якщо похідна при переході через точку x_0 міняє знак з мінуса на плюс, то x_0 є точкою мінімуму функції.

Щоб дослідити функцію на монотонність та екстремуми, потрібно:

1) Знайти похідну функції в точці x: $f'(x)$.
2) Знайти критичні точки функції, т/б знайти точки в яких похідна функції дорівнює нулю або не існує.
3) Розбити область визначення функції критичними точками на проміжки.
4) Встановити знаки похідної при переході через критичні точки.
5) Виписати проміжки монотонності функції і точки екстремуму.
6) Обчислити значення функції *f(x)* в кожній екстремальній точці.

2. Дослідження функції на опуклість графіка кривої.

Означення. Якщо існує δ-окіл точки x_0 такий, що для всіх x, взятих з цього околу, відповідні точки кривої лежать над дотичною (під дотичною), проведеною до кривої в точці $(x_0,f(x_0))$, то криву в цій точці називають *опуклою вниз(опуклою вгору).*

Теорема. Нехай криву задано рівнянням *y=f(x)* і нехай існує δ-окіл точки x_0 такий, що функція *f(x)* при кожному x, взятому з цього околу, має

@ Аграрно-економічний коледж ПДАА
МАТЕМАТИКА ON-LINE http://aekmatem.pl.ua/

похідні другого порядку включно, причому *f'(x)* у точці x_0 є неперервною функцією. Тоді, якщо $f''(x)>0$, то крива в точці $(x_0,f(x_0))$- опукла вниз, якщо $f''(x)<0$, то крива в точці $(x_0,f(x_0))$- опукла вгору.

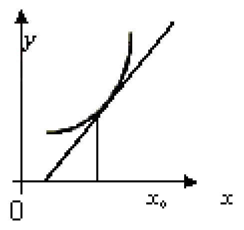


рис. 1 Крива опукла вниз

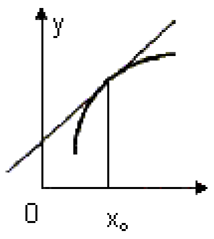


рис.2 Крива опукла вгору

Означення. Точка графіка диференційованої функції, яка є одночасно кінцем інтервалу опуклості вгору і кінцем інтервалу опуклості вниз, називається *точкою перегину* графіка цієї функції.

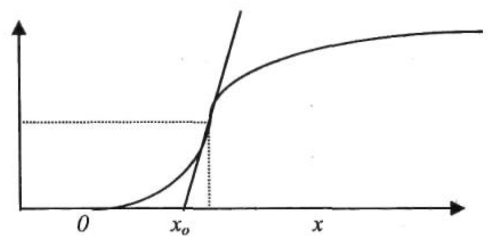


рис. 3 Точка перегину

Теорема *(необхідна умова).* Нехай функція $y=f(x)$ має неперервні похідні другого порядку на інтервалі (a,b), причому $x_0 \in (a,b)$. Для того щоб точка $(x_0,f(x_0))$ була точкою перегину, необхідно, щоб виконувалась умова $f''(x_0)=0$.

Теорема *(достатня умова).* Якщо функція $y=f(x)$ має неперервні похідні другого порядку на інтервалі (a,b) і при переході через $x_0 \in (a,b)$ друга похідна змінює знак, то точка $(x_0,f(x_0))$ є точкою перегину.

@ Аграрно-економічний коледж ПДАА
МАТЕМАТИКА ON-LINE http://aekmatem.pl.ua/

Рекомендована література:

1. Богомолов М.В. Практичні заняття з математики: Навч. посібник для технікумів, – К.: Вища школа. Головне вид-во, 1979, с.87-98.
2. Бубняк Т.І. Вища математика: Навчальний посібник. – Львів: “Новий світ–2000”,2004, с.98-102.
3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.:А.С.К., 2001, с.246-265.

Завдання для виконання:

Розв’яжіть завдання згідно свого варіанту (№ варіанту – остання цифра порядкового номера по журналу):

***Завдання**. Знайти екстремуми функцій, точки перегину та інтервали опуклості і вгнутості графіків функцій.*

1. а) $y=\frac{1}{3}\left(x^3-14x^2+49x-36\right)$, б) $y=\frac{1}{x^2+1}$
2. а) $y=\frac{1}{20}\left(x^3-25x^2+143x-119\right)$, б) $y=\frac{1}{x^2-1}$
3. а) $y=\left(x^3-8{,}5x^2+20x-12{,}5\right)$, б) $y=\frac{x}{x^2-4}$
4. а) $y=\frac{1}{3}\left(x^3-16x^2+69x-54\right)$, б) $y=\frac{x^2-4}{x}$
5. а) $y=\frac{1}{20}\left(x^3-29x^2+215x-187\right)$, б) $y=\frac{1}{x^2-7x+12}$
6. а) $y=\left(x^3-9{,}5x^2+26x-17{,}5\right)$, б) $y=x-\sqrt{x}$
7. а) $y=\frac{1}{3}\left(x^3-8x^2+5x+14\right)$, б) $y=x\sqrt{x-3}$
8. а) $y=\frac{1}{20}\left(x^3-19x^2+55x+75\right)$, б) $y=\ln\left(x^2+1\right)$
9. а) $y=\left(x^3-2{,}5x^2+2x+1{,}5\right)$, б) $y=\frac{x^3}{x^2-1}$
10. а) $y=\frac{1}{3}\left(x^3-18x^2+33x+28\right)$, б) $y=\frac{6-x^3}{x^2}$

@ Аграрно-економічний коледж ПДАА
МАТЕМАТИКА ON-LINE http://aekmatem.pl.ua/

Приклади розв’язування вправ:

Приклад. Знайти екстремуми функцій, точки перегину та інтервали опуклості і вгнутості графіків функцій

$$y = -4 \cdot \frac{(x+2)^2}{x^2+4}$$

Розв’язання.

1. Дана функція є дробово-раціональною. Вона визначена на всій множині дійсних чисел, оскільки знаменник в нуль не обертається, тобто $D(y) = (-\infty; \infty)$.

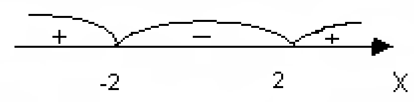
Знайдемо екстремуми функції.

Знаходимо похідну заданої функції:

$$y' = \left(-4 \cdot \frac{(x+2)^2}{x^2+4}\right)' = -4 \cdot \frac{2(x+2) \cdot 1 \cdot (x^2+4) - (x+2)^2 \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = -4 \cdot \frac{2(x+2)(x^2+4-x^2-2x)}{(x^2+4)^2} =$$
$$= \frac{-16(x+2)(2-x)}{(x^2+4)^2}$$

Знаходимо критичні точки функції:

$$\frac{-16(x+2)(2-x)}{(x^2+4)^2} = 0 \Rightarrow (x+2)(2-x) = 0 \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 2.$$



Отримані дві критичні точки функції розбивають область визначення функції на проміжки. З’ясуємо знак похідної на кожному проміжку: похідна додатня на інтервалах (-∞;-2), (2;+∞), і від’ємна на інтервалі (-2;2).

Оскільки при переході через критичну точку x=2, похідна функції змінює знак з мінуса на плюс, то точка x=2 є точкою мінімуму функції. Знайдемо мінімум функції:

$$y_{\min} = f(2) = -4 \cdot \frac{(2+2)^2}{(2)^2+4} = -4 \cdot \frac{16}{8} = -8.$$

@ Аграрно-економічний коледж ПДАА
МАТЕМАТИКА ON-LINE http://aekmatem.pl.ua/

Оскільки, при переході через критичну точку x=-2, похідна функції змінює знак з плюса на мінус, то точка x=-2 є точкою максимуму функції. Знайдемо максимум функції:

$$y_{\max} = f(-2) = -4 \cdot \frac{(-2+2)^2}{(-2)^2+4} = 0$$

2. Знайдемо інтервали опуклості та вгнутості кривої, що є графіком даної функції. Ці інтервали відокремлюються точками, в яких друга похідна дорівнює нулю, і точками розриву функції. Знайдемо похідну другого порядку і стаціонарні точки. Маємо:

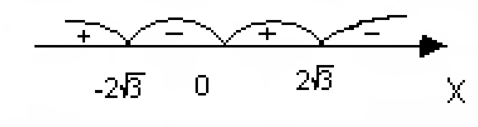
$$y'' = \left(\frac{-16(x+2)(2-x)}{\left(x^2+4\right)^2}\right)' = -16\left(\frac{4-x^2}{\left(x^2+4\right)^2}\right)' = -16 \cdot \frac{-2x \cdot \left(x^2+4\right)^2 - (4-x^2)\cdot 2\left(x^2+4\right)\cdot 2x}{\left(x^2+4\right)^4} =$$

$$= 16 \cdot 2x \cdot \frac{\left(x^2+4\right)+(4-x^2)\cdot 2}{\left(x^2+4\right)^3} = 32x \cdot \frac{\left(x^2+4\right)+8-2x^2}{\left(x^2+4\right)^3} = 32x \cdot \frac{12-x^2}{\left(x^2+4\right)^3}$$

$y''=0$

$$\Rightarrow 32x \cdot \frac{12-x^2}{\left(x^2+4\right)^3} = 0 \Rightarrow x \cdot \left(12-x^2\right) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ або } x^2 = 12 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2\sqrt{3},\ x_3 = -2\sqrt{3}$$

Маємо три стаціонарні точки функції, отже, отримаємо чотири інтервали на яких з'ясуємо знак другої похідної і відповідно інтервали опуклості та вгнутості функції. Дістанемо:



Функція вгнута на інтервалах $\left(-\infty;-2\sqrt{3}\right)\cup\left(0;2\sqrt{3}\right)$, оскільки на цих інтервалах $y''>0$.

Функція опукла на інтервалах $\left(-2\sqrt{3};0\right)\cup\left(2\sqrt{3};\infty\right)$, так як $y''<0$.

Точки $x_1=0,\ x_2=2\sqrt{3},\ x_3=-2\sqrt{3}$ є точками перегину графіка функції.

Питання для самоконтролю:

- Яка функція називається зростаючою (спадною) на проміжку?
- Як знайти проміжки зростання (спадання) функції?
- Що таке нулі функції?
- Що називається екстремумом функції?
- Сформулюйте правило дослідження функції на екстремум.
- Яка крива називається опуклою (вгнутою) на інтервалі?
- Дайте означення точок перегину.
- Сформулюйте правило знаходження інтервалів опуклості, вгнутості та точок перегину.