# Лекція № 3.

## Тема: Матриці, дії над ними.

**План:**

1. **Поняття матриці. Види матриць.**
2. **Дії над матрицями.**
3. **Ранг матриці.**
4. **Обернена матриця.**

## 1.Поняття матриці. Види матриць.

***Означення.*** Таблицю чисел, що містить $m$ рядків і $n$ стовпців виду

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (3.4)$$

називають матрицею розмірності $m$ x $n$ , а самі числа $a_{ij}$, де $i$ приймає значення від 1 до $m$, а $j$ - від 1 до $n$, називають елементами або членами цієї матриці.

***Означення.*** Якщо $m = n$, то матрицю називають квадратною розмірності $n$. Надалі для спрощення, у тих випадках, коли це потрібно, матрицю будемо записувати у вигляді: $A= (a_{ij})$, де $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$.

***Означення.*** Матриця, яка складається з одного рядка називається матрицею-рядком, а матриця , яка складається з одного стовпчика називається матрицею-стовпцем.

***Означення.*** Матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю, називається нульовою.

***Означення.*** Дві матриці називаються рівними, якщо вони однієї розмірності і їх відповідні елементи рівні.

***Означення.*** Діагональною називається квадратна матриця, в якої всі елементи, що не належать головній діагоналі, дорівнюють нулю. Діагональна матриця, в якої всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці, називається одиничною.

***Означення.*** Якщо в матриці $A$ розмірності $m$ $x$ $n$ переставити рядки із стовпцями, то отримаємо матрицю $A^7$ розмірності $n$ $x$ $m$, яку будемо називати транспонованою матрицею.

## 2.Дії над матрицями.

Введемо операції над матрицями.

1. *Сумою* двох матриць $A=(a_{ij})$ і $B=(b_{ij})$ однакової розмірності називають матрицю С тієї ж розмірності, до того ж $c_{ij}= (a_{ij}+ b_{ij})$,. тобто відповідні елементи додаються.

2. *Добутком* матриці $A=(a_{ij})$ на число А називають матрицю $C$ тієї ж розмірності, що і матриця $A$, до того ж $c_{ij} = (Aa_{ij})$, тобто всі елементи множаться на число А

3. *Добутком* матриці $A =(a_{ij})$ розмірності $m$ $x$ $n$ на матрицю В=($b_{ij}$) розмірності n x k називають матрицю С $=(C_{pg})$ розмірності $m$ $x$ $k$, до того ж $C_{pg}=a_{p1}$ $b_{1g}+$ $a_{p2}$ $b_{2g}+\ldots+a_{pn}$ $b_{ng}$.

**Зауваження.** Для множення матриць має суттєве значення порядок їх слідування. Матрицю $A$ можна множити на матрицю $B$ лише тоді, коли кількість стовпців матриці $A$ дорівнює кількості рядків матриці $B$. Утворення елемента $c_{pg}$ можна отримати як множення *p-того* рядка матриці $A$ на g-тий стовпчик матриці $B$.

*Властивості.*

1. Відносно суми:

- $A+B = B+A$ (комутативність);

- $(A+B) + C = A+(B+C)$ (асоціативність).

2. Відносно добутку на число:

- $\lambda A=A\lambda$ (комутативність) ;
- $(\lambda+ \mu) A = \lambda A+\mu A$ (дистрибутивність відносно суми чисел);
- $\lambda (A+ B)=\lambda A+\lambda B$ (дистрибутивність відносно суми матриць).

3. Відносно множення матриць :

1) $AB\neq BA$ (не комутативність) ;
2) $(A\cdot B)\cdot C = A (B\cdot C)$ (асоціативність);
3) $(A\cdot B)^{T} = B^{T}\cdot A^{T}$, де "т" - операція транспонування

<u>**Приклад.**</u> Знайти матрицю $c = AB + A^T, якщо A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$

*Розв'язання.*

Матриця $A_{2\times 2}$ узгоджена з матрицею $B_{2\times 2}$, тому матриця АВ буде:

$$\text{AB} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot(-2) & 1\cdot 2+2\cdot 0 \\ 0\cdot 1+(-1)\cdot(-2) & 0\cdot 2+0\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Оскільки матриці А і В – квадратні, то матриця

$$\text{C} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Відповідь: $\text{C} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

## 3.Ранг матриці.

***Означення.*** *Рангом матриці А* називається найбільший порядок відмінного від нуля її мінора.

Ранг матриці А прийнято позначати $Rg(A)$ або *rang A*.

Якщо всі елементи $a_{ij}$=0, то *rang A*=0.

Ранг матриці не змінюється, якщо:

- замінити рядки стовпцями (при цьому стовпці замінюються відповідними рядками);
- помножити який-небудь рядок (стовпець) на відмінне від нуля число;

- викреслити рядок (стовпець), всі елементи якого дорівнюють нулю;
- додати до елементів одного рядка (стовпця) відповідні елементи іншого рядка (стовпця);
- переставити місцями два рядки або два стовпці.

Для знаходження рангу матриці існує декілька способів, один з них метод обведення.

Нехай маємо матрицю А розміру $m \times n$. Якщо не всі елементи матриці А нульові, то *rangA*≥1. Утворимо визначник другого порядку, що міститься у верхньому лівому куті: $M_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Якщо $M_1$=0, то досліджуємо інші мінори другого порядку. Якщо вони всі нульові, то *rangA*=1. А якщо серед мінорів другого порядку є відмінний від нуля, то *rangA*≥2. Далі аналогічно досліджуємо мінори 3-го порядку і т.д.

**Приклад.** Знайти ранг матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Розв'язання.*

Оскільки не всі елементи матриці А нульові, то *rangA*≥1. Розглянемо мінор другого порядку $M_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 4 = -8$. Так як один з мінорів другого порядку відмінний від нуля, то *rangA*≥2.

Розглянемо мінор третього порядку, який є також визначником матриці А.

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, так як елементи третього рядка – нулі.

Оскільки мінор третього порядку матриці А є єдиним і дорівнює нулю, то *rangA*=2.

## 4.Обернена матриця.

У даному випадку будемо розглядати лише квадратні матриці.

***Означення.*** Матрицю *B* називають *оберненою* до матриці *A,* якщо $A\cdot B=E$.

Обернену матрицю до матриці *A* позначають $A^{-1}$.

***Означення.*** Матрицю називають *не особливою,* якщо визначник цієї матриці відмінний від нуля.

**Теорема** Для будь-якої не особливої квадратної матриці існує, і до того ж єдина, обернена матриця, яка знаходиться за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \qquad (3.5)$$

Для знаходження оберненої матриці можна використати наступну схему:

- знайти визначник матриці *A;*
- знайти алгебраїчні доповнення всіх елементів $A_{ij}$ матриці *A* і записати нову матрицю;
- поміняти місцями стовпці одержаної матриці (транспонувати матрицю). Помножити одержану матрицю на $^1/_{\det A}$.

<u>**Приклад.**</u> Знайти матрицю обернену до даної

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

*Розв'язання.*

Обернена матриця знаходиться за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

де det$A$- визначник матриці $A$, $A_{ij}$ - алгебраїчні доповнення всіх елементів $a_{ij}$ матриці А.

Обчислимо визначник матриці А:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 24 - 8 + 12 + 6 + 24 = 1$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення $A_{ij}$ всіх елементів $a_{ij}$ матриці А за формулою $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, де $M_{ij}$ – мінор елемента $a_{ij}$ матриці А, тобто визначник на одиницю меншого порядку, утворений з визначника матриці викреслюванням і-го рядка та j-го стовпця.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 6 = -3 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 8 & -6 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -(-24 + 24) = 0$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 8 - 12 = -4 \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -(-3 + 1) = 2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 4) = 3$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -6 + 3 = -3 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} = -(-6 + 8) = -2$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 8 = -5$$

Підставивши в формулу отримані алгебраїчні доповнення і значення визначника матриці А, отримаємо обернену матрицю

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -4 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -4 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$

**Питання для опитування:**

- Що називається матрицею розміром $m \times n$?
- Які види матриць ви знаєте?
- Дайте означення квадратної матриці.
- Дайте означення одиничної матриці.
- Що називається визначником матриці?
- Яка матриця називається оберненою до даної?
- Як знайти обернену матрицю?
- Що таке ранг матриці? Як знаходиться ранг?